Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Organ van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

62e jaargang
1986 | 1987
juni/juli

Euclides 9

Wolters-Noordhoff

Euclides

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 50,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 35,–; contributie zonder Euclides *f* 30,–.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij Prof. dr F. Goffree, Bremlaan 16, 3735 KJ Bosch en Duin, tel. 030-78 37 23. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½, bij voorkeur op Euclides-kopijbladen. De redactiesecretaris P.E. de Roest, Blijhamsterweg 94, 9672 XA Winschoten, tel. 05970-2 20 27 stuurt desgevraagd kopijbladen met gebruiksaanwijzing toe. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs H. Bakker, Breitnerstraat 52c, 8932 CD Leeuwarden, tel. 058-13 59 76.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland.
Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 44,75. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 26,50.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 7,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

ISSN 01.65-0394

Euclides
Inhoud van de 62e jaargang 1986/1987

Artikelen

Kees van Baalen
Mathesis in Utopia, 175
Gert Bakker
Examens wiskunde voor lbo en mavo in 1987, 158
Harm Boertien
Doelen en toetsing bij toegepaste wiskunde: een verkenning I, 237
Doelen en toetsing bij toegepaste wiskunde: een verkenning II, 271
A. W. Boon
$^{g}\log a = {}^{p}\log a \cdot {}^{g}\log p$ *met het groeimodel*, 44
H. G. B. Broekman en J. M. J. Weterings
Ja maar, ik ben gewend..!, 45
Harrie Broekman
Structuur aanbrengen door leerlingen, 179
Ordening, structuur, houvast, 204

T. H. Chen
Een fout in het wiskunde A examen?, 15

F. M. W. Doove
De leesportefeuille, 211

Hans Freudenthal
Historische sprookjes, 112
Vergeten jubilea, 284

Willem van Gaans en Dolly van Drooge
Leermiddelen Ontwikkeling Wiskunde, 269
Fred Goffree
Annemarie, de eredivisie, een heks en de NS, 97
Fred Goffree en Jos ter Pelle
Van rekenen (op je 10de) naar Wiskunde (op je 16de), 137

Hans ter Heege
Over de grens, 171

Sieb Kemme
Is het wiskundeonderwijs in Nederland nu nog niet af?, 193
Het laatste nieuws, 222
J. Kieft
De weekdag uit het hoofd berekend, 17
E. M. Koerts en E. J. van Rossum
Leerconcepties en wiskunde B, 25

An Mogensen-Van Werveke
Ringing the Changes, 33
Henk Mulder
Onoplosbaar, wat is dat?, 199

Cor Nagtegaal
Euclides, de computer en het wiskundeonderwijs, 225
H. Nieland
Moderne verbindingssystemen, 89

Hans Pouw
Differentiatie in heterogene groepen, 147
M. Pranger en R. Sjamaar
Functies van twee variabelen, 5

Nander Querelle
Multiple Choice, 165

Peter van 't Riet, Jan Kroon en Annette van der Wal
Wiskunde op materieel kennisniveau, 257

S. van der Salm
Enige inhoudelijke en didactische aspecten van de digitale wiskunde, 65
George Schoemaker
Tekeningen, 75
H. N. Schuring
Toetsperikelen, 79
De 25e Nederlandse Wiskunde-olympiade, 127
H. J. Spalburg
Een praktische meetkundeles voor de brugklas, 4
Mike Staring en Jeroen Staring
Wiskunde in de parapsychologie, 57
Anne van Streun
Nieuwe didactische wiskundelijnen, 105
A bas Euclide! Weg met de verzamelingen, 161

Jan Karel Timmer
De C.J.E.A.E.M., 282
R. Troelstra
Vrijdag de dertiende, 143
H. C. Tijmes
Educatieve Operations Research: Wis en Waarachtig, 227

Heleen Verhage en Truus Dekker
'Vrouwen en Wiskunde' verkent het internationale circuit, 151
P. G. J. Vredenduin
Grensgevallen II, 10
Grensgevallen III, 85
Grensgevallen IV, 115
Veranderingen in het wiskundeonderwijs, 213
De Wageningse Methode derde en vierde leerjaar, 279

E. H. F. Weijgers
De stelling van Schroeder-Bernstein, 203

Diversen

Bij het begin van de 62e jaargang, 1
N.V. v. W. Verslag van het verenigingsjaar 1985-1986, 2
Examen Wiskunde A 1986, 2e periode
Jaarvergadering/Studiedag 1986, 30
Examenopgaven Wiskunde B 1986, 104
Jaarrede 1986, 129
Notulen algemene vergadering, 131
Tussenrapport van de nomenclatuurcommissie, 243
Examenbesprekingen, 186

Mededelingen

3, 64, 73, 95, 124, 136, 142, 190, 223, 286, 287

Recreatie

28, 55, 91, 123, 155, 164, 224, 255, 287

Boekbesprekingen

Werner Blum en Günther Törner
Didaktik der Analysis, 21
R. van Asselt e.a.
Wiskunde voor het hoger beroepsonderwijs, 96
F. Goffree
Wiskunde & Didaktiek voor aanstaande leraren basisonderwijs, 156
R. J. Brook, G. C. Arnold, T. H. Hassard, R. M. Pringle en Marcel Dekker
The fascination of statistics, 157
W. P. van den Brink en P. Koele
Statistiek, deel 2: Theorie, 178
R. S. Doran en V. A. Belfi
Characterizations of C-algebras. The Gelfand-Naimark theorems*, 185
R. Fisher en C. J. Malle
Mensch und Mathematik, 192
Alexanderson e.a.
The William Lowell Putnam Math. Competition, 198
Lawler e.a.
The Traveling Salesman Problem, 198
M. Minoux
Mathematical Programming: Theory and Algorithms, 198
Kernighan en Pike
De UNIX programmeeromgeving, 198
L. R. Mustoe
Worked Examples in Engineering Mathematics, 198
Phillips en Cornelius
Computational Numerical Methods, 198

Chao c.s.
Probability Theory and Harmonic Analysis, 210
W. T. van Horssen en A. H. P. van der Burgh
Inleiding matrixrekening en lineaire optimalisering, 210
P. R. Gribik en K. O. Kortanek
Extremal methods of operation research, 226
C. J. Date
Database, een inleiding, 226
Ross Honsberger
Mathematical Gems III, 270
Catharine Anne Baker en Lynn Margaret Batten
Finite Geometries, Lecture notes in pure and applied mathematics, 270
Prof. dr. O. Bottema
Theoretische mechanica, 281
L. Narici en E. Beckenstein
Topological vector spaces, 281

Kalender

96, 128, 156, 192, 224, 256, 288

Wiskunde op materieel kennisniveau

Een voorbeeld

Peter van 't Riet, Jan Kroon, Annette van der Wal

1 Inleiding

Het gebruik van levensechte materialen in de wiskunde van het voortgezet onderwijs is alles behalve de gewoonste zaak van de wereld. Wie de meest gebruikte wiskundemethoden van het lbo, mavo, havo en vwo doorbladert, zal slechts zelden leerstof tegenkomen waarin materialengebruik een essentiële rol speelt. Als het al voorkomt dan beperkt het zich meestal tot een aantal eenvoudige zaken, zoals het knippen van figuren uit de vlakke meetkunde[1], het knippen en vouwen van uitslagen van lichamen in de ruimtemeetkunde[2], het werken met getalstroken[3], het gebruik van een spiegel[4] of een kaartspel[5]. In sommige wiskundemethoden voor het voortgezet onderwijs is zelfs niets van materialengebruik terug te vinden[6].
Ook in de Nederlandse didaktiek van de wiskunde is er voor het gebruik van materialen in de wiskunde van het voortgezet onderwijs relatief weinig of geen aandacht. Het aantal artikelen dat aan dit onderwerp werd gewijd in de laatste tien jaargangen van Euclides (1976-1986) is op de vingers van één hand te tellen[7]. In andere Euclides-artikelen vinden we incidenteel vermeldingen van materialengebruik in het kader van het wiskundeonderwijs. Deze voorbeelden blijven echter grotendeels beperkt tot het knippen en verschuiven van figuren. Vele van deze artikelen gaan bovendien niet over de wiskunde van het gewone voortgezet onderwijs[8], maar over wiskunde in het basisonderwijs en op de pedagogische academie[9], in het blindenonderwijs[10], of in het individueel voortgezet kunstzinnig onderwijs[11]. Tevens treffen we in een aantal Euclides-artikelen voorbeelden van materialengebruik aan met betrekking tot onderwijs in landmeetkunde[12], Hewet-wiskunde[13], IOWO-pakketjes[14]. Eén keer zelfs betreft het wiskundegebruik in de privésfeer[15].
Ook in de Nieuwe Wiskrant is de aandacht voor het gebruik van levensechte materialen niet al te groot. In de eerste drie jaargangen vinden we slechts één artikel dat duidelijk gewijd is aan de materiële onderbouwing van een stuk wiskundeonderwijs[16]. Desondanks is het aantal artikelen met voorbeelden van materialengebruik hier verhoudingsgewijs omvangrijker dan in Euclides. Ook nu gaat het echter vaak niet om het gangbare wiskundeonderwijs[17], maar om basisonderwijs[18], Hewet-wiskunde[19], rekenonderwijs[20], of vakdidaktisch onderwijs[21].
Deze schaarste met betrekking tot materialengebruik in de wiskunde van het voortgezet onderwijs treft men eveneens aan in het standaardwerk 'Didactiek van de wiskunde' van Van Dormolen (1976). Tevergeefs zal men daarin iets zoeken dat met dit onderwerp te maken heeft. Met het boek 'Wiskundeonderwijs nu' van Lagerwerf (1982) is het in dit opzicht iets beter gesteld. Men vindt er onder de titel 'Wiskunde tastbaar maken' een kort hoofdstuk, waarin het belang uiteengezet wordt van wat Lagerwerf 'handwerk' noemt[22]. Ook elders in het boek treft men hier en daar onderwerpen aan in deze sfeer, bijvoorbeeld bij de bespreking van de zogenaamde Russische methode[23]. Vaak gaat het bij Lagerwerf echter om wat men in termen van de Russische leerspychologie 'gematerialiseerde mentale handelingen' zou kunnen noemen, zoals het tekenen van figuren en het uitknippen en verschuiven van hun onderdelen.
Gezien de toegenomen aandacht die er de laatste jaren in ons land onder invloed van het voormalige IOWO is voor concretisering van het wiskundeonderwijs, is de geringe aandacht voor het gebruik van materialen in de wiskunde van het voortgezet onderwijs verbazingwekkend. De IOWO-pakketjes voor het voortgezet onderwijs tonen relatief nog de meeste aandacht voor materialengebruik. Het beperkt zich daarbij echter tot de onderbouw. In de bovenbouwpakketjes treffen we wel veel context, maar geen materialengebruik aan[24]. Dit is niet zo verwonderlijk als we zien dat het begrip 'context' het centrale begrip is waarop het werk van het IOWO ten behoeve van het voortgezet onderwijs

was gestoeld. De vele concretiseringen doen vrijwel steeds een beroep op het concreet-mentale kennisniveau van de leerlingen, waarbij de materialisering zich vooral beperkt tot het maken van tekeningen en grafieken. In het grote geheel van de wiskunde van het voortgezet onderwijs spelen de IOWO-pakketjes bovendien slechts een beperkte rol.
Het gebruik van materiële leermiddelen in de eigenlijke zin van het woord, waarmee de leerlingen motorische handelingen kunnen en moeten verrichten als ondersteuning van het leren van wiskunde, is dus een weinig ontwikkeld gebied. Het blijft in het voortgezet onderwijs voornamelijk beperkt tot wat elementaire meetkunde en kansrekening. Wie als wiskundeleraar meer wil, zal of zijn blik op het buitenland moeten richten, of het enthousiasme en de creativiteit moeten opbrengen zelf materialen te ontwerpen en te maken. Want ook een leermiddelenindustrie voor deze sector van het onderwijs kent Nederland niet.

Het is onze bedoeling in een aantal artikelen de aandacht te vragen voor het gebruik van levensechte materialen bij het onderwijzen van wiskunde aan 12- tot 16-jarigen. Veel van wat daarbij op papier komt, zal een voorlopig karakter hebben, daar de praktijk op dit gebied slechts weinig omvangrijk is. Een probleem is bovendien, dat het niet zo moeilijk is van tijd tot tijd leuke materialen te bedenken bij allerlei leerstof, maar hoe er mee gewerkt moet worden en of bepaalde materialen wel de beoogde ondersteuning van het leerproces geven, dat is van achter het bureau niet vast te stellen. Daarom zullen we zo nu en dan verslag doen van enkele pogingen om het gebruik van de ontworpen materialen aan de praktijk te toetsen. Geen groot opgezette onderzoeken dus, maar probeersels zoals elke leraar en lerares die in de eigen les zou kunnen uitvoeren. Daarmee is dan ook een groot deel van dit eerste artikel gevuld. Een voorbeeld van materialengebruik, niet om precies te laten zien hoe dat nu wel moet, maar alleen om er achter te komen wat daaraan allemaal vast zit. In de volgende afleveringen zal er tevens plaats worden ingeruimd voor wat meer theoretisch getinte overwegingen.

2 De omtrek van de cirkel

De relatie tussen de omtrek van de cirkel en zijn straal of diameter wordt in alle wiskundemethoden voor het voortgezet onderwijs behandeld. Het onderwerp leent zich uitstekend tot het verrichten van meethandelingen en het in relatie met elkaar brengen van de meetresultaten. Desondanks refereren slechts twee van de vijf door ons bekeken wiskundemethoden aan dergelijke meethandelingen:

- In Passen en Meten[25] wordt slechts meegedeeld dat het getal pi bij de omtrek en oppervlakte van een cirkel een grote rol speelt. Als je de cirkelomtrek door de diameter deelt, vind je altijd ongeveer 3.
- Moderne Wiskunde[26] vraagt metingen te verrichten aan één conservenblik. De verkregen verhouding wordt pi genoemd, hetgeen ongeveer gelijk is aan $3\frac{1}{7}$. Daar het bij één meting blijft, zal dit het leerproces nauwelijks ondersteunen. In de praktijk zullen vele leraren deze meting waarschijnlijk overslaan, al was het alleen al omdat het de moeite niet loont voor één meting met conservenblikjes te gaan slepen.
- Ook Denken, Doen en Begrijpen[27] biedt de mogelijkheid tot het verrichten van metingen. In het lbo-deel moet er echter een touwtje op een cirkel gelegd worden. Een vrijwel onmogelijke opgave, die bovendien tot onnauwkeurige resultaten leidt en daarom in de praktijk wel vaak zal worden overgeslagen. In het mavo-deel moet het koordje om een zelfgemaakte cilinder worden gespannen. De omtrek wordt door de middellijn gedeeld. Het boek merkt op dat we bij nauwkeurig werken het getal 3,14 vinden, ofwel bij benadering pi. Stelt men zich echter voor dat de leerlingen de cilinder van karton of papier maken, dan zullen zij wegens de vervorming van het materiaal nooit nauwkeuriger kunnen werken dan b.v. $24{,}0/7{,}3 = 3{,}3$. Ook hier dus een niet erg doordachte werkwijze, die gemakkelijk overgeslagen zal worden.
- In de methode Getal en Ruimte[28] is de cirkel waar het om gaat, ingebed in de plattegrond van een atletiekbaan. De lengte van de baan is al bepaald, evenals die van de middellijn van de (halve) cirkel. Ook de verhouding 'omtrek staat tot middellijn' wordt door het boek voorgerekend.
- De methode Sigma[29] pakt het probleem geheel abstract aan. Via gelijkvormigheid van cirkels wordt 'bewezen' dat de verhouding omtrek staat

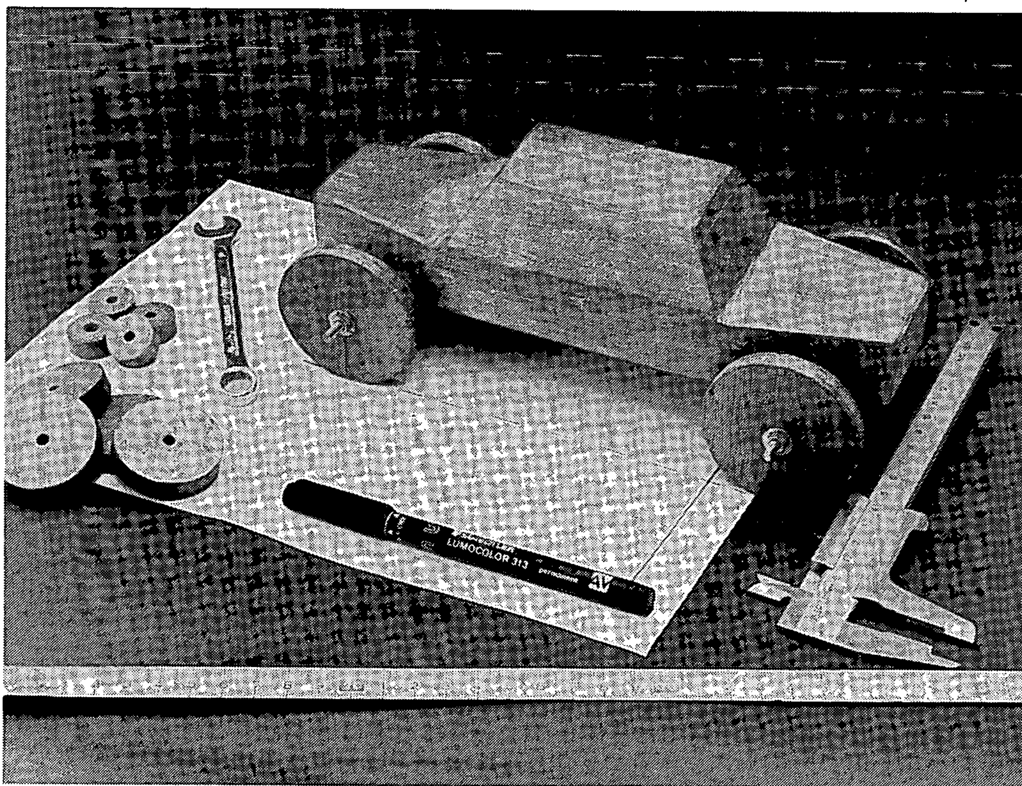
tot middellijn voor alle cirkels gelijk is. Metingen zijn op dit niveau van wiskunde bedrijven in het geheel niet aan de orde.

De mogelijkheden tot materialisering die het onderwerp 'verhouding omtrek-diameter' biedt, worden in de gangbare methoden dus niet of nauwelijks benut. Dit is alleen al jammer, omdat de praktische toepassing van het onderwerp – voor zover leerlingen er ooit mee te maken zullen krijgen – in het algemeen een bij uitstek materieel karakter zal hebben. In het verdere wiskundeonderwijs zelf komt het onderwerp slechts zelden terug. In de volgende paragraaf beschrijven we een mogelijkheid het onderwerp 'verhouding omtrek-diameter' op een meer materiële manier aan de leerlingen te presenteren in een enigszins levensechte context. Daarna volgen enige observaties van het onderwijsleerproces van een aantal leerlingen, een evaluatie van het gebruikte lesmateriaal en tenslotte een inventarisatie van aspecten aan wiskundeleren met behulp van materiële voorwerpen.

3 De omtrek van de cirkel op materieel niveau

3.1 Het lesmateriaal

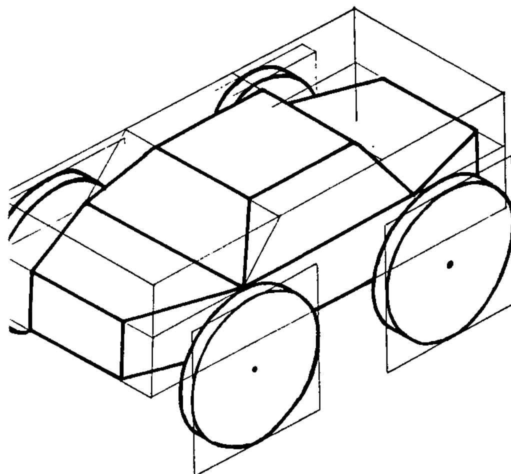
Wil men het verband tussen diameter en omtrek van de cirkel de leerling langs materiële weg duidelijk maken, dan ligt het voor de hand dit te doen door middel van meethandelingen waarvan men de resultaten met elkaar in verband brengt. Er zijn dan in principe twee mogelijkheden om de omtrek van een cirkelvormig lichaam te meten. In de eerste plaats kan men een touwtje of iets dergelijks om het betreffende lichaam leggen en daarvan de lengte opmeten. In de tweede plaats kan men het cirkelvormige lichaam laten rollen over een vlak oppervlak en de afgelegde afstand na één omwenteling laten opmeten. Deze tweede methode heeft het nadeel dat de meting van de omtrek wat indirecter geschiedt, maar opent de mogelijkheid van een realistische context met behulp van wielen aan voertuigen. Bij de ontwikkeling van het prakticummateriaal werd voor deze methode gekozen. Er



Het lesmateriaal

werd een model van een auto gemaakt met de mogelijkheid er wielen van verschillende grootte onder te zetten (zie foto 1). De leerlingen zouden zelf de wielen kunnen monteren en demonteren. Gekozen werd voor drie verschillende diameters. Ook werd een 'weg' in de vorm van een plaat board gemaakt. Het materiaal bestond uit 1 auto, 4 wielen gemerkt A, vier wielen gemerkt B, vier wielen gemerkt C, 8 moertjes, 8 ringetjes, 2 assen en een weg. Daaraan werd het volgende gereedschap toegevoegd: een moersleutel, een schuifmaat, een meetlat, 3 werkbladen om op de weg te leggen en een zwarte viltstift. Het geheel werd opgeborgen in een doos. Als de leerlingen aan het werk beginnen, bevindt de auto zich in de doos en is voorzien van de 4 wielen A.
Belangrijk was nu de vraag welke instructies de leerlingen bij het ontworpen materiaal zouden moeten krijgen. Een mogelijkheid was hun een korte opdracht te geven in de trant van: 'Meet diameter en omtrek van de drie soorten wielen en ga na welk verband er bestaat tussen beide grootheden'. Te verwachten daarbij was echter dat er heel veel zou misgaan, hetgeen het beoogde leerproces zou kunnen schaden of zelfs onmogelijk maken, tenzij de leraar voortdurend zou ingrijpen. Daarom werd besloten een instructie te schrijven die het de leerlingen van stap tot stap zou duidelijk maken, wat zij moesten doen met de materialen. Vervolgens werd een enigszins op geprogrammeerde instructie gelijkende reeks opdrachten ontworpen. Daarbij werd de rol van de leerkracht tot een minimum beperkt en getracht de kans op het maken van fouten door de leerlingen zo klein mogelijk te doen zijn (zie de instructiebladen).

OMTREK CIRKEL



Annette van der Wal

- 1 -

OMTREK VAN EEN CIRKEL

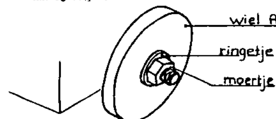
Materiaal: Opbergkist met daarin:

auto
4 wielen gemerkt A
4 wielen gemerkt B
4 wielen gemerkt C
8 moertjes
8 ringetjes
2 assen
weg

Benodigd gereedschap: sleutel
schuifmaat
maatlat
papieren met aanwijzingen
zwarte stift

De auto uit de doos heeft vier wielen.

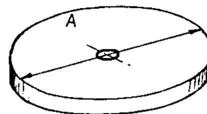
Opdracht 1. Haal de wielen van de auto met behulp van de volgende aanwijzingen.



a. Draai met de sleutel het moertje van het asje af. Haal daarna het ringetje er af en vervolgens het wiel.

b. Herhaal dit bij de drie andere wielen.

Opdracht 2.



Hierboven zie je wiel A getekend. De diameter van het wiel is aangegeven door de pijl.

Meet de diameter van wiel A met de schuifmaat of met de maatlat.
Wiel A heeft een diameter van .... cm.

Instruktiebladen

Opdracht 3

Meet de diameter van wiel B.
Wiel B heeft een diameter van .... cm.

Opdracht 4

Meet de diameter van wiel C.
Wiel C heeft een diameter van ....cm.

Opdracht 5

Vul de volgende tabel in:

Wiel	diameter
Wiel A	cm
Wiel B	cm
Wiel C	cm

Opdracht 6

Monteer de wielen A weer aan de auto met behulp van de volgende aanwijzingen.

a. Het asje door de bovenste gaatjes.

b. Doe het ringetje om het asje, daarna het wiel en als laatste draai je het moertje vast.

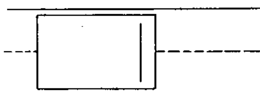
c. Doe dit ook aan de andere kant van het asje.

d. Neem het tweede asje aan de andere kant van de auto en doe ook deze door het bovenste gaatje

e. Voer b en c ook voor dit asje uit.

Opdracht 7

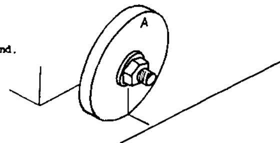
Pak nu werkblad 1 en leg dit op de weg.



Op de weg zie je precies waar je het papier moet neerleggen.

Opdracht 8

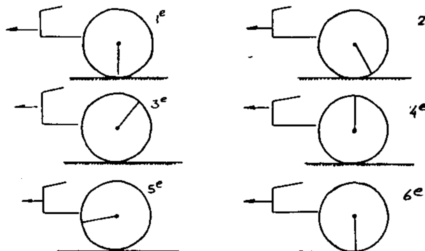
Op de wielen zijn lijnen getekend.



Zet de auto op het werkblad zo dat de lijn op het wiel de tafel raakt. (zie de tekening hieronder) Voer dit uit bij een voorwiel van de auto.

Opdracht 9

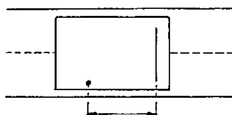
Ga nu rustig met de auto rijden recht over de weg.
Let daarbij op het voorwiel, je ziet dan het volgende:



Kijk of dat inderdaad het geval is.

Opdracht 10

Zodra de lijn die op het wiel getekend is weer beneden is (situatie 6) stop dan met rijden.
Zet een stip op het papier.



Opdracht 11

Meet de afstand van de lijn tot het punt. Dit is de afstand die het autootje heeft afgelegd na 1x ronddraaien van het wiel A.

De afstand die wiel A heeft afgelegd na 1 maal ronddraaien is ....cm.

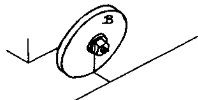
Opdracht 12

Haal de 4 wielen van de auto af (moertjes en ringetjes). Zet nu de 4 wielen B aan de auto



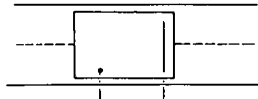
Opdracht 13

Zet de auto weer op het werkblad en zorg ervoor dat de lijn op het wiel de lijn op het werkblad raakt.



Opdracht 14

Ga weer met de auto rijden totdat het wiel weer éénmaal is rondgedraaid.
Zet een stip op het papier.



Opdracht 15

Meet de afstand van de lijn tot het punt.

De afstand die wiel B heeft afgelegd na éénmaal ronddraaien is ....cm.

Opdracht 16

Haal de 4 wielen van het autootje af en zet de 4 wielen C aan de auto.



Opdracht 17

Neem werkblad 111.
Zet de auto zo op het werkblad dat de lijn die op het wiel getekend is de lijn op het werkblad raakt.

Opdracht 18

Ga met de auto rijden totdat het wiel weer éénmaal is rondgedraaid.
Zet een stip op het papier.

Opdracht 19

Meet de afstand van de lijn tot de punt.

De afstand die wiel C heeft afgelegd na éénmaal ronddraaien is ....cm.

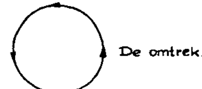
Opdracht 20

Maak de volgende tabel af.

	De afstand afgelegd na éénmaal ronddraaien
Wiel A	cm
Wiel B	cm
Wiel C	cm

Opdracht 21

De afstand die het wiel aflegt na éénmaal ronddraaien dat is de omtrek van het wiel.



Opdracht 22

Maak de volgende tabel af.

diameter	omtrek
cm	cm
cm	cm
cm	cm

Opdracht 23

Wat is groter de omtrek van wiel A of de diameter.
Antwoord :

- 6 -

Opdracht 24

Hoeveel keer zo groot?

Antwoord:

Opdracht 25

Wat is groter de omtrek van wiel B of de diameter?
Antwoord:

Opdracht 26

Hoeveel keer zo groot?
Antwoord:

Opdracht 27

Wat is groter de omtrek of de diameter van wiel C
Antwoord:

Opdracht 28

Hoeveel keer zo groot?
Antwoord:

Opdracht 29

Als je een wiel hebt met een diameter van 10 cm, wat is dan de omtrek?

De omtrek is ....cm.

Opdracht30

Een autowiel heeft een diameter van 50 cm. Wat is de omtrek?
De omtrek is .... cm.

Klassegesprek

Leraar: Zou het echt 3x zo groot zijn? Hebben jullie misschien verkeerd gemeten.

Leerlingen: We hebben niet precies 3 gemeten.

lln komen tot de ontdekking na nog een keer meten en rekenen dat het getal telkens iets groter dan drie is.

3.2 De lessen

De leerlingen zouden de leerstof zelfstandig moeten doornemen. Besloten werd het hen in paren te laten doen, zodat zij elkaar zouden kunnen instrueren en corrigeren. Bovendien zou er dan iets zichtbaar kunnen worden van de sociale functie die het werken met levensechte materialen in het wiskundeonderwijs zou kunnen hebben. Bij het doorwerken van de leerstof zou de docent vooral als observant aanwezig zijn en het onderwijsleerproces niet in de vorm van uitgebreide protocollen maar in algemene termen beschrijven. Na afloop zou een kort gesprek met de leerlingen worden gehouden om te controleren of zij inderdaad begrepen dat omtrek en diameter in een vaste verhouding tot elkaar staan.

Aldus samengesteld werd de leerstof afgenomen op vier paren leerlingen van een lto/ito-school. Om zicht te krijgen op het functioneren van de leerstof op verschillend niveau is het pakketje uitgeprobeerd op leerlingen uit verschillende jaargroepen en uit verschillende afdelingen. Er werden vier paren gevormd. Hieronder volgen de observatieverslagen van de onderwijsleerprocessen, het ene wat uitgebreider dan het andere.

3.3 Observaties van het leerproces

a Lto 2, Karel en Patrick

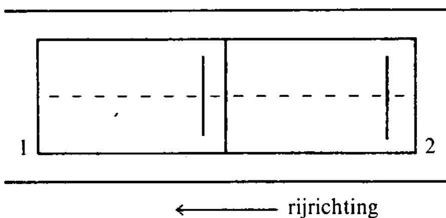
Karel en Patrick zitten in de tweede klas van het lto. Zij hebben, wanneer zij met het leerstofpakketje aan het werk gaan, de tekst voor zich liggen en de doos met de auto naast zich staan. De eerste bladzijde van de tekst wordt rustig maar snel doorgelezen. Ze doen dat ieder voor zich. Patrick, die het dichtst bij de doos zit, kijkt er af en toe in. Wat in de doos zit, is na een poosje voor hem leuker dan nog langer de tekst te moeten lezen. Maar Karel is nog niet zo ver. Toch pakt Patrick de auto en dan is ook Karel opeens klaar met lezen. De tekst wordt aan de kant geschoven en de auto wordt al gauw 'gesloopt'. Karel is vol bewondering voor de auto en roept enkele keren uit: 'Gave Mercedes, zeg!' Patrick houdt de auto voor zich en gaat hem met een professioneel gebaar keuren. Dan bedenken ze dat ze moeten beginnen met de opdrachten.

Ze lezen opnieuw de tekst, pakken al snel de liniaal uit de doos en gaan meten. Ze doen dit beiden, na elkaar, maar krijgen verschillende antwoorden. Het blijkt dat ze de tekst niet goed hebben gelezen. Patrick heeft de straal van het wiel gemeten en Karel de diameter. Het kost ze nogal wat tijd voor ze door hebben dat een van beiden een fout heeft gemaakt en wie dat was. Ze lezen de tekst te snel, waardoor ze steeds opnieuw moeten beginnen. Toch vinden ze het blijkbaar niet vervelend, want ze blijven rustig fouten maken om die vervolgens weer te verbeteren. Deze fouten worden telkens door henzelf ontdekt.



Het rijden met het autootje

Karel en Patrick gaan steeds op zoek naar de opdrachten waarin zij iets met het autootje moeten doen. De verdere tekst daaromheen is dan te veel voor ze. Bij opdracht 6 zetten ze de wielen aan de auto en gaan ze ermee rijden. Dat is een hele ervaring voor ze. Patrick buigt zich voorover en wil de auto vooruitduwen. Een van de wielen blijft steken en Patrick zegt: 'Hij rijdt wel sterk!' Het wiel wordt wat losser gedraaid en de auto doet het nu goed volgens Patrick. Bij opdracht 7 aangekomen leggen de jongens twee werkbladen op de weg, hetgeen volgens de tekening in de tekst niet nodig is. Ze gaan over de werkbladen rijden en ontdekken wat ze moeten doen. Ze hebben daarvoor echter niet de tekst gelezen, maar zijn er door het heen en weer rijden van de auto achter gekomen. Ze leggen elkaar uit dat ze naar het lijntje op het wiel moeten kijken. Op de weg liggen de twee werkbladen achter elkaar (zie figuur 1). Ze zetten de auto met de voorwielen op werkblad 1 en met de achterwielen op werkblad twee en gaan rijden in de richting van de pijl. Op werkblad 1 wordt een stip gezet. Het andere werkblad wordt niet gebruikt.



Figuur 1 Weg bedekt met 2 z.g. werkbladen.

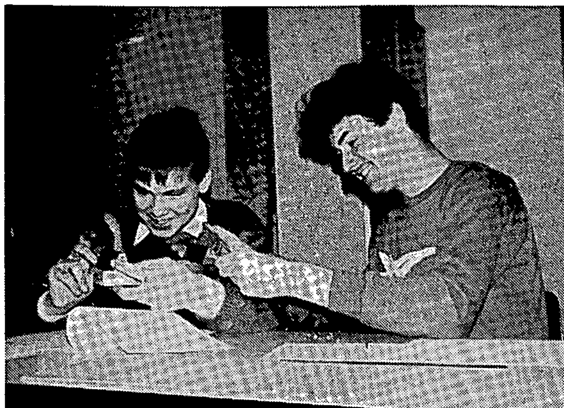
Als de jongens aan de wielen B toe zijn, gaat er iets mis. Ze draaien de wielen A van de auto af. Dat gebeurt met veel plezier. Deze wielen leggen ze op tafel en ze beginnen wat met elkaar te kletsen. Daarna lezen ze weer even in de tekst en pakken vervolgens de wielen A die ze zojuist op tafel hebben gelegd. Deze monteren ze weer aan de auto. Als ze klaar zijn, houden ze de auto voor zich en beginnen te lachen. Ze komen er achter dat ze 'stom' hebben gedaan en verwisselen 'in een ijltempo' de wielen A voor de wielen B. Als de auto klaar is, is het een leuke sportauto geworden, vinden ze. In de tijd die volgt, vliegen ze door de opdrachten heen. Dat leidt echter tot het maken van fouten, die ze ontdekken bij het invullen van de tabellen. Dan moeten ze soms terug naar de tekst om te kijken waar het mis ging. Tussen de bedrijven door worden er allerlei opmerkingen gemaakt, vooral tijdens het monteren en demonteren van de wielen. Verbaasd zijn ze dat ze de wielen er elke keer weer moeten afhalen. De laatste opdrachten gaan heel snel en dan zijn ze opeens klaar. De tekst wordt weggeschoven. Patrick gaat nog wat rijden met de auto. Karel pakt zijn jojo en gaat voor zich uit zitten staren.

Na afloop wordt het werk samen met de jongens nagekeken. Heel verbaasd staan ze te kijken dat er voor alle drie de wielen dezelfde verhouding van diameter en omtrek uitkomt. Verteld werd ze dat dat het getal pi was. Daar hadden ze nog nooit van gehoord. Op de vraag waarom ze twee werkbladen hadden gebruikt, antwoordden ze dat ze de hele weg wilden bedekken. Ze vonden het heel leuk om te doen en zouden wel vaker op deze manier wiskunde willen hebben.

b Lto 3, Hans en René

Hans en René lezen eerst heel nauwkeurig de tekst en controleren of alles in de doos zit. Daarna meten zij de diameters van de wielen met de schuifmaat. Zij controleren elkaars metingen. René legt een werkblad op de weg en wil met de auto gaan rijden. Hans leest nog even de tekst, want hij is het niet eens met wat René doet. Daarna legt hij nog een werkblad op de weg. Bij het monteren van de wielen B vergeten zij te letten op de lijnen die er op getekend zijn. Sommige wielen hebben ze nu met de lijn naar binnen gemonteerd, waardoor deze onzichtbaar is geworden. Dat merken ze als ze gaan rijden. Ze halen de wielen er weer af en draaien deze om, zodat ze nu van alle vier de wielen de lijnen zien. Hans heeft ineens door dat dat helemaal niet nodig was: 'Bij één wiel de lijn zien is genoeg, hoor René!' Al de tijd werken ze goed samen en gaan probleemloos door de stof heen.

Als na afloop de gang van zaken met hen besproken wordt, blijken alle antwoorden goed te zijn. Voor alle zekerheid deed de docent samen met de jongens nog één meting heel precies en vertelde dat 3,14 de nauwkeurigste waarde was. Dat vonden ze heel leuk.



Veel plezier bij het monteren van de wielen



Het meten van de diameter

c Ito 3, Sjacco en Marco

Sjacco en Marco zijn speciaal voor ons onderzoekje uitgekozen. Ze zitten in 3 ito (individueel technisch onderwijs), afdeling installatietechniek, en werken volgens hun wiskundedocent voor wiskunde op A-niveau. Van Sjacco is bekend dat hij nauwelijks vijf minuten achter elkaar bij zijn werk kan blijven. Marco is erg rustig. Als ze de tekst voor zich hebben, beginnen ze te lezen. Ze doen dat heel nauwkeurig en wisselen gedurende die tijd geen woord met elkaar. Het duurt lang voordat ze de auto uit de doos pakken. Ze schijnen dat om een of andere reden niet te durven. Ze fluisteren wat met elkaar en het lijkt of ze ergens op wachten.

Na een poosje vertelt de docent dat ze de auto wel mogen pakken. 'O', zegt Sjacco, 'ik begreep er al niets van'. Dan demonteren ze de wielen en beginnen aan de meting. Sjacco meet echter de diameter van het in de tekst afgebeelde wiel in plaats van die van het echte wiel. Marco wijst hem op zijn fout. Sjacco reageert met: 'Waar zijn dan de wielen die ik moet meten?' Marco antwoordt: 'De wielen die aan de auto zaten'. Als Sjacco van zijn verbazing is bijgekomen, gaan ze de goede diameter meten. Er is nog even discussie over de vraag welk wiel ze zullen opmeten. Tenslotte besluiten ze het bij alle vier de wielen A te doen.

Sjacco heeft 39 cm gevonden. Als Marco het merkt, vraagt hij hem of hij echt denkt dat het wiel zo groot is. 'Dat kan toch nooit', zegt hij en vult daarna aan: 'Er moet een komma staan'. Als de diameters van de wielen zijn opgemeten, bergen ze alles weer op in de doos. Vervolgens halen ze alles weer uit de doos tevoorschijn. Zo te zien doen ze het met veel lol.

Het neerzetten van de auto op de weg levert de nodige problemen op. Eerst staat hij scheef. Ze snappen niet goed wat ze moeten doen. Toch komt de auto uiteindelijk goed op het werkblad te staan. Alle metingen verrichten ze twee keer, zodat ze beiden een antwoord hebben. Ze werken heel langzaam, maar lopen niet vast. Af en toe stellen ze een vraag aan de docent. Een van die vragen luidt, of ze dit nu elke week krijgen. Als de wielen B aan de auto zitten en ze de metingen uitvoeren, stuiten ze op een probleem. Eerst nu vergelijken ze hun meetresultaten met elkaar. Marco ontdekt dat 'zijn' auto een grotere afstand aflegt dan die van Sjacco. Sjacco zet de auto namelijk op de weg en rijdt er niet mee, maar meet nogmaals de diameter. Ze overleggen wat er fout is en vermoeden dat ze fout gelezen hebben. Dan ontdekt Sjacco dat het bij de afstand die de auto aflegt, gaat om de omtrek van het wiel en niet om de diameter. Hij roept uit: 'Omtrek is natuurlijk groter dan diameter!' 'Ja', merkt Marco op, 'dat zei ik toch'. Ze blijven voortdurend enthousiast bezig, wat vooral blijkt uit het feit dat ze fanatiek de opdrachten blijven lezen.

Bij de nabespreking blijkt dat de gevonden antwoorden allemaal goed waren. Marco is verbaasd dat de omtrek altijd ongeveer driemaal zo groot is als de diameter. Hij denkt dat dat toevallig is en kan zich niet voorstellen dat het altijd zo mooi uitkomt. Daarom laat de docent ze nog een wiel opmeten en opnieuw komt er ongeveer 3 uit. Daarna zijn ze overtuigd en vinden ze het leuk dat het altijd uitkomt.

d Lto 4, Gert en Frits
Gert en Frits gaan aan het werk met het lesmateriaal, alsof ze elke dag zoiets doen. Ze lezen snel de aanwijzingen en de wielen worden vlot van de auto gehaald. Frits meet met de schuifmaat en Gert controleert het gevonden antwoord met de liniaal. Ze lezen de tekst heel precies en alles gaat goed. Ze hebben nergens problemen mee. De tabellen worden correct ingevuld. In stilte maken ze individueel de laatste opdrachten.
Bij de nabespreking van het werk zei Frits het erg gemakkelijk te hebben gevonden. Gert geloofde niet dat er altijd 3,14 zou uitkomen. Daarop vroeg de docent, waarom ze dat getal dan wel gebruikten bij de sommen van opdracht 29 en 30. Gert antwoordde: 'Dan is het misschien toch waar'. Op dat moment ging er bij Frits ineens een lampje branden: 'Dat getal is natuurlijk pi!' Toen begrepen ze het helemaal.

3.4 Evaluatie van het lesmateriaal
Alle vier de tweetallen hebben zonder grote problemen met het lesmateriaal kunnen werken. Wel was er een groot verschil in de tijd die zij voor het doorwerken ervan nodig hadden. De vierde-klassers waren er in ongeveer 30 minuten doorheen, terwijl de tweede- en derde-klassers er veel langer over deden. Met name de lto-3-leerlingen Hans en René deden er tamelijk lang over (bijna 60 minuten), mede omdat zij zeer nauwkeurig werkten.
Het lesmateriaal heeft voor de vier groepjes niet dezelfde functie gehad. Voor de vierde-klassers was de stof eenvoudig. De les had daarom meer het karakter van het ophalen of toepassen van oude kennis en een meer open opdracht was hier waarschijnlijk beter op zijn plaats geweest. Toch bleek tijdens de nabespreking, dat niet alle reeds aanwezige kennis van het onderwerp tijdens het doorwerken van de opdrachten had gefunctioneerd. Met name de Aha-Erlebnis van Frits dat het natuurlijk om het getal pi ging, laat zien dat – ook als het onderwerp al behandeld is – een herhaling van de stof op materieel niveau tot grotere integratie van kennis kan leiden. Feitenkennis die voordien wel aanwezig was, maar niet functioneerde, kan daardoor parate kennis worden, welke gemakkelijker is aan te wenden. Bovendien kan de materiële onderbouwing van een begrip het onthouden ervan vergemakkelijken.

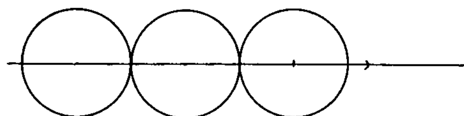
Tussen de beide groepen derde-klassers was een groot verschil in benadering van het lesmateriaal. De ito-3-leerlingen Sjacco en Marco lieten telkens hun verbazing blijken, terwijl de lto-3-leerlingen Hans en René vrij ongeëmotioneerd, rustig hun werk deden. Beide tweetallen komen het begrip omtrek regelmatig tegen bij andere, praktische vakken en de leerstof fungeerde min of meer als verwerking en toepassing. Door de reële context van de afstand die een wiel bij een omwenteling aflegt, leren ze een van de functies die het begrip 'omtrek van een cirkel' vervult, nader kennen. Het lesmateriaal viel duidelijk bij hen in de smaak, waardoor hun motivatie om door te werken heel de tijd aanwezig bleef.
De tweede-klassers Karel en Patrick waren heel speels. Ze lazen de tekst niet goed en moesten echt aan het werk worden gezet. Hun interesse lag vaak meer bij het autootje dan bij de leerstof. We zien hier het gevaar dat het lesmateriaal door zijn vorm kan afleiden van de leerstof, waarvan het een concretisering is. De verhouding tussen omtrek en diameter van de cirkel hadden deze twee leerlingen nog niet eerder gehad en het getal pi kenden zij nog niet. Het lesmateriaal zou in hun geval dus kunnen dienen als inleiding of oriëntatie op de invoering van de omtrekformule.
We zien hier dat het gebruikte lesmateriaal in principe op twee verschillende manieren te gebruiken is in het wiskundeonderwijs. Allereerst zou het ingezet kunnen worden om de leerlingen aan de nodige


Het 'slopen' van het autootje

ervaringen te helpen op basis waarvan de omtrekformule kan worden ingevoerd. Uit oogpunt van wiskundeonderwijs is het wellicht een bezwaar dat daarvoor nogal veel niet-wiskundige activiteiten gepleegd moeten worden. Een groot deel van de door de leerlingen te verrichten handelingen bestaat uit nauwkeurig lezen en het uitvoeren van manipulaties met de materialen. Desondanks zou dit bij de ito-leerlingen en bij de lto-leerlingen in de lagere klassen wel eens bij uitstek de methode kunnen zijn om hen begrip van de wiskunde bij te brengen. Een tweede mogelijkheid, die te prefereren is in de hogere klassen van het lto, is het lesmateriaal te gebruiken voor verwerking en toepassing, maar dan in de vorm van meer open opdrachten. Deze mogelijkheid valt ook te overwegen voor mavo-, havo- en vwo-leerlingen. Met name het ontstaan van een grotere integratie van kennis en een grotere wendbaarheid van reeds geleerde begrippen en regels zou een belangrijk leerresultaat kunnen zijn op dit niveau van wiskundeonderwijs.

Tot slot van deze evaluatie merken we nog op dat de ontworpen tekst niet bedoeld is als een afgeronde behandeling van het onderwerp 'verhouding van omtrek en diameter'. Daarvoor geeft zij het onderwerp te fragmentarisch weer. De bedoeling van het lesmateriaal was niet anders dan enig zicht te krijgen op de mogelijke rol die levensechte materialen bij het leren van wiskunde zouden kunnen spelen. Wil men het gehanteerde idee van het autootje binnen een groter geheel van leerstof gaan gebruiken, dan wijzen we hier op een aantal beperktheden in de huidige tekst. Uitgaande van het model van kennisniveaus, door Van 't Riet eerder in Euclides gepubliceerd[30], kunnen we de volgende eventuele tekorten erin aanwijzen.

De regel 'omtrek van de cirkel is iets meer dan driemaal de diameter' wordt in feite in de opdrachten 24 t/m 28 geïntroduceerd op *concreet-symbolisch niveau*, dat wil zeggen met behulp van het verkregen getallenmateriaal. Deze regel had echter ook heel goed op het *materiële kennisniveau* zelf geïntroduceerd kunnen worden door bijvoorbeeld te laten onderzoeken hoeveel wielen er in rechte lijn op de afgelegde afstand gelegd zouden kunnen worden (zie figuur 2). Ook een nauwkeurige *verbale omschrijving* van de verrichte handelingen en het daaruit verkregen resultaat heeft niet tot het lesmateriaal behoord. Te denken valt aan een eventueel te memoriseren zin als: 'Meten we de diameter van een cirkel en zijn omtrek, dan vinden we steeds dat de omtrek iets meer dan driemaal de diameter is'. Zo'n zin of een aanverwante verbale omschrijving kan een enorme steun zijn bij de vorming van een mentaal schema. Ook het *abstract-symbolische kennisniveau* in de vorm van de formule $O = \pi \cdot d$ is niet in het lesmateriaal opgenomen. Wil men dus met het autootje in de wiskundelessen aan het werk, dan zal men de te verrichten materiële handelingen moeten inbedden in een breder geheel van kenniselementen. Ons onderzoekje toont slechts aan dat het zinvol zou kunnen zijn hier verder aan te gaan werken.



Figuur 2 De door een wiel na één omwenteling afgelegde weg is iets langer dan drie wielen met de diameters achter elkaar gelegd.

4 Aspecten van wiskundeleren op materieel niveau

Aan het slot van dit artikel willen we een korte opsomming geven van aspecten van wiskundeleren op materieel niveau. Mogelijk zal er in volgende artikelen de gelegenheid zijn op een aantal van deze aspecten wat nader in te gaan.

We noemen dan in de eerste plaats het *leerpsychologische* aspect. Het verrichten van handelingen aan materialen kan een essentiële rol spelen bij het leren van begrippen en regels. Met name in de leertheorie van Galperin speelt dit aspect van het leren een grote rol, hoewel de materialen waaraan gehandeld moet worden bij hem lang niet altijd even levensecht zijn. Ook kwam in ons onderzoekje het leerpsychologische aspect zo nu en dan duidelijk naar voren, bijvoorbeeld in de Aha-Erlebnis van Frits: 'Dat is natuurlijk het getal pi!'

Een tweede punt dat uit de weergegeven observaties naar voren komt, is dat van de *motivatie.* Alle acht leerlingen vonden het leuk op deze praktische manier wiskunde te krijgen. Zelfs de tweede-klassers, waarvan de motivatie het meest wisselend was, werkten door met een behoorlijke regelmaat.
In de derde plaats zitten er aan het werken met materialen vele *didaktische* kanten. Wil men hier regelmatig in het wiskundeonderwijs gebruik van maken, dan doemt er direct een aantal vragen op. Welke consequenties heeft het gebruik van materialen voor de organisatie van de wiskundeles? Wat gebeurt er als men niet aan twee maar aan achtentwintig leerlingen wil lesgeven met behulp van materialen? In welke gevallen moet men wel of niet van materialen gebruik maken? Op welke wijze zal men er het beste gebruik van kunnen maken? Alleen voor demonstratiedoelen of vooral ook om de leerlingen er zelf ervaringen mee te laten opdoen?
Een vierde aspect betreft de vraag welke bijdrage het gebruik van materialen zou kunnen leveren aan *differentiatie* in het wiskundeonderwijs. Onze observaties tonen duidelijk aan dat verschillende leerlingen heel verschillend te werk gaan met hetzelfde lesmateriaal. Wellicht zijn er typen leerlingen bij wie materialengebruik een positieve invloed heeft op de wiskundige prestaties, terwijl er andere typen zijn bij wie het nauwelijks enig effect heeft.
Wil men het gebruik van materialen tot een geïntegreerd onderdeel van het wiskundeonderwijs maken, dan doemen er vragen op op het terrein van de *curriculumontwikkeling.* De zaak wordt interessanter naarmate men materialen weet te ontwikkelen die op heel verschillende niveaus van wiskunde-onderwijs en met heel verschillende soorten leerstof gebruikt kunnen worden.
Als laatste komt dan ook het terrein van de *toetsing* van het onderwijs in het vizier. Want als het gebruik van materialen een regelmatig weerkerend verschijnsel zou worden in de wiskunde van het voortgezet onderwijs, moeten dergelijke materialen dan ook geen rol gaan spelen bij de toetsing van de door de leerling verworven kennis en vaardigheden? Een vraag die wel heel ver weg lijkt te liggen!

Noten

1 B.v. in: Denken, Doen en Begrijpen, deel 2def (mavo), p. 68 e.v.; deel 3cd (mavo), p. 13 e.v.; Moderne Wiskunde, 4e editie, deel 1, p. 11.
2 B.v. in: Denken, Doen en Begrijpen, deel 1abc (lbo), p. 35; Passen en meten, deel 2, p. 24.
3 B.v. in: Denken, Doen en Begrijpen, deel 1abc (lbo), p. 79.
4 B.v. in: Moderne Wiskunde, 4e editie, deel 2, p. 30.
5 B.v. in: Moderne Wiskunde, 4e editie, deel 2, p. 114.
6 Dit is b.v. het geval met de methoden 'Sigma' en 'Getal en Ruimte'.
7 Alleen zijn als zodanig te beschouwen: Krammer en Huurnink-Hoddenbach, 1979; Lagerwerf, 1978; Lagerwerf, 1979.
8 Wat het voortgezet onderwijs betreft: Van Hiele, 1977, p. 132; Knip en Schoemaker, 1980, p. 392; Muskens en De Porto, 1981, p. 426; Meester, 1982, p. 91; Van Dormolen, 1984, p. 331 e.v.; Van 't Riet, 1985, p. 186 e.v.; Van den Brink, 1985, p. 225; Van de Craats, 1986, p. 231 e.v.
9 Goffree, 1977a, p. 365 e.v.; 1977b, p. 8 e.v.; 1977c, p. 86 e.v.; 1977d, p. 129.
10 Van de Ven, 1980, p. 145 e.v.
11 Van Baalen, 1977, p. 123 e.v.
12 Kemme en Nagtegaal, 1981, p. 401 e.v.
13 Van Lint, 1985, p. 240.
14 Schoemaker, 1979, p. 16; Vredenduin, 1981, p. 49 e.v.
15 Van 't Riet en Zwaneveld, 1982, p. 334 e.v.
16 Streefland, 1984, p. 29 e.v.
17 Van Dormolen, 1982, p. 32, 33; Schoemaker, 1983, p. 49 e.v.; Maurer-Crutzen, 1984, p. 3 e.v.
18 Van den Brink, 1981, p. 34, 35; Broekman, 1982, p. 16.
19 Kindt, 1981, p. 16 e.v.; Verhage, 1982, p. 24; Meester, 1984, p. 18 e.v.; Koerts en Visser, 1984, p. 32 e.v.
20 Goffree en Pelle, 1983, p. 7 e.v.
21 Smid en Verweij, 1982, p. 30, 31.
22 Pag. 39 e.v. Overigens bevat dit hoofdstuk vrijwel letterlijk de tekst van een eerder in Euclides gepubliceerd artikel (Lagerwerf, 1979).
23 Pag. 128 e.v.
24 Materialengebruik vinden we in de pakketjes Pythagoras, Reis om de wereld, Regelmatige figuren, Belvia, Zie je wel, Spionnen in de stad, Schaduw en diepte. Behalve het tekenen van figuren komen er in de overige pakketjes geen levensechte materialen voor, waaraan werkelijk gehandeld moet worden.
25 Passen en Meten, deel 6, p. 33 e.v.
26 Moderne Wiskunde, 4e editie, deel 2, p. 76 e.v.
27 Denken, Doen en Begrijpen, deel 2 lbo, p. 154; deel 3cd mavo, p. 13 e.v.
28 Getal en Ruimte, deel 2m, p. 137 e.v.
29 Sigma, deel 3m, p. 141 e.v.
30 Van 't Riet, 1983; Van 't Riet, 1985.

Literatuur

Baalen, K. van, *Tweedegraadsfunkties kinderspel*, Euclides 53, 4, 1977, p. 123-125.
Brink, F. J. van den, *Wiskundige wereldoriëntatie – een onderzoek naar wiskunde bij kinderen*, Nieuwe Wiskrant Proefnummer, 1981, p. 34-35.
Brink, P. W. van den, *'In de wiskundeles', De commutatieve eigenschap*, Euclides 60, 6, 1985, p. 225.
Broekman, H. G. B., *Variabelen, letters, onbekenden, bekende onbekenden*, Nieuwe Wiskrant 1, 3, 1982, p. 15-19.
Craats, J. van de, *Voorbeelden*, Euclides 61, 7, 1986, p. 231-240.
Dormolen, J. van, *Didactiek van de Wiskunde*, Utrecht, 1976, 2e druk.
Dormolen, J. van, *Sinusachtige funkties*, Nieuwe Wiskrant 1, 3, 1982, p. 30-36.
Dormolen, J. van, *Leren wat bewijzen is*, Euclides 59, 7, 1984, p. 325-334.
Goffree, F., *Vakdidaktische Notities 3*, Euclides 52, 10, 1977a, p. 365-368.
Goffree, F., *Vakdidaktische Notities 4*, Euclides 53, 1, 1977b, p. 8-12.
Goffree, F., *Vakdidaktische Notities 6*, Euclides 53, 3, 1977c, p. 83-88.
Goffree, F., *Vakdidaktische Notities 7*, Euclides 53, 4, 1977d, p. 129-134.
Goffree, F., Pelle, J. ter, *Voortgezet rekenen in de brugklas*, Nieuwe Wiskrant 3, 1, 1983, p. 3-11.
Hiele, P. M. van, *Hoe moet men...*, Euclides 52, 5, p. 128-141.
Kemme, S., Nagtegaal, C., *Landmeetkunde op school*, Euclides 56, 9, 1981, p. 401-408.
Kindt, M., *Determinant en spijkerbord*, Nieuwe Wiskrant Proefnummer, 1981, p. 16-21.
Koerts, E. M., Visser, M. C., *Betekenisvol leren met Hewet*, Nieuwe Wiskrant 3, 3, 1984, p. 32-37.
Krammer, H., Huurnink-Hoddenbach, E., *Praktikum in de wiskundeles*, Euclides 55, 4, 1979, p. 140-152.
Lagerwerf, B., *Wiskunde 'doen'*, Euclides 54, 4, 1978, p. 118-120.
Lagerwerf, B., *Wiskunde tastbaar maken*, Euclides 55, 1, 1979, p. 21-24.
Lagerwerf, B., *Wiskundeonderwijs nu*, Groningen, 1982.
Lint, H. van, *Hewetaardigheden*, Euclides 60, 6, 1985, p. 237-240.
Maurer-Crutzen, C., *Breien met wiskunde*, Nieuwe Wiskrant 3, 3, 1984, p. 3-8.
Meester, F., *Met wiskunde meer vrouw(?)*, Euclides 58, 3, 1982, p. 91-100.
Meester, F., *Ruimte voor de ruimte*, Nieuwe Wiskrant 3, 3, 1984, p. 17-20.
Muskens, L., Porto, W. de, *Markt op een themadag*, Euclides 56, 9, 1981, p. 425-428.
Riet, N. van 't, Zwaneveld, B., *Wiskundige houding*, Euclides 57, 9, 1982, p. 333-346.
Riet, S. P. van 't, *Zes kennisnivo's in het wiskundeonderwijs*, Euclides 58, no. 7, 1983, p. 241-247.
Riet, S. P. van 't, *Zes kennisnivo's, Een nadere uitwerking*, Euclides 60, 5, 1985, p. 181-188.
Schoemaker, G., *De aarde draait*, Euclides 55, 1, 1979, p. 13-20.
Schoemaker, G., *Even krijten (2)*, Nieuwe Wiskrant 2, 3, 1983, p. 49-51.
Smid, H. J., Verweij, A., *Ruimte, meetkunde en inzicht*, Nieuwe Wiskrant 2, 2, 1982, p. 29-34.
Streefland, L., *Grafieken inhoud geven (2)*, Nieuwe Wiskrant 3, 3, 1984, p. 29-31.
Ven, A. van de, *De rol van voorstellingen en materiële handelingen bij wiskunde-onderwijs aan een blinde leerling*, Euclides 56, 4, p. 145-151.
Verhage, H., *Ruimtelijk inzicht, een verwaarloosd gebied?*, Nieuwe Wiskrant 2, 1, 1982, p. 22-28.
Vredenduin, P. G. J., *Leerplanontwikkeling onderweg 2a en 2b*, Euclides 57, 2, 1981, p. 41-60.

Over de auteurs:

Jan Kroon studeerde wiskunde in Utrecht en was tot voor kort als docent verbonden aan de Christelijke Lerarenopleiding Zwolle.
Peter van 't Riet is hoofddocent wiskunde aan de Christelijke Lerarenopleiding Zwolle en publiceerde eerder in Euclides over setvorming en over kennisniveaus.
Annette van der Wal is vierde-jaarsstudent wis- en natuurkunde aan de Christelijke Lerarenopleiding Zwolle. Zij heeft het lesmateriaal waarover dit artikel gaat ontworpen en op de acht leerlingen uitgeprobeerd.

LeermiddelenOntwikkeling Wiskunde (LOW)

Willem van Gaans, Dolly van Drooge

Het SiO-project (Scholen in Ontwikkeling) is een project, gedragen door de Landelijke Pedagogische Centra en de Initiële Opleidingen. De ondersteuningsinstellingen bieden scholen de mogelijkheid om gebruik te maken van de diensten van haar medewerkers. Een onderdeel van het SiO-project is het middenkader leermiddelenontwikkeling. Voor het vak wiskunde wordt aan dit middenkader meegewerkt door twee docenten wiskunde in het voortgezet onderwijs. De opdracht aan deze twee docenten, betreft leermiddelenontwikkeling wiskunde (LOW), luidt: het verhogen van de kwaliteit van leermiddelen in samenwerking met ontwikkelaars, uitgeverijen en docenten. In de praktijk komt dit neer op het afstemmen van de behoeften van gebruikers en uitgevers. Wat de gebruikers betreft zijn drie grote groepen te onderscheiden. (Een docent of school kan tot meerdere groepen behoren.)

a de groep waartoe docenten/scholen behoren die om uiteenlopende redenen ontevreden zijn met de huidige leermiddelen. Deze ontevredenheid kan voortkomen uit:
  1 Het niet meer aansluiten van leermiddelen bij de leef- en ervaringswereld van leerlingen (een facet van de demotivatie problematiek).
  2 Het niet meer aansluiten van leermiddelen bij de ontwikkeling die zich ten aanzien van de vakinhouden voordoen.
  3 Het niet meer aansluiten van leermiddelen bij de ontwikkeling die zich ten aanzien van de structuur voordoet (fusie e.d.).

b de groep waartoe docenten/scholen behoren die om uiteenlopende redenen deelnemen aan het SiO-project.

c de groep waartoe docenten/scholen behoren die geavanceerde leermiddelen nodig hebben om hun doelstellingen te bereiken (Vbao-Middenschool).

Wat houdt dit in voor de werkzaamheden van LOW. Om wat voorbeelden te noemen.

1 Het maken van een analyse van het totale aanbod aan wiskunde-onderwijs aan leerlingen van 12-16 jaar.
Deze analyse bestaat uit drie gedeelten.
Het eerste deel beschrijft de ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs voor leerlingen van 12 tot 16 jaar.
We proberen trends te signaleren. Een paar richtinggevende factoren daarbij zijn:
- invloeden van het veranderende reken/wiskunde onderwijs van de basisschool op het voortgezet onderwijs (het onderwerp van de E-conferentie van de nascholing).
- ontwikkelingen rond de eindexamens havo/vwo (Hewet en Hawex) en de invloed ervan op de onderbouw, óók van lbo en mavo.
  (zie b.v. Euclides 61-8: 'Hewet in de onderbouw?')
- doelstellingen voor die leerlingen uit de onderbouw waarvoor wiskunde na 2 of 3 jaar eindonderwijs is.
- zingeving van het wiskunde-onderwijs (een onderwerp van de D-conferentie van de nascholing)

Het tweede deel bestaat uit een 'keuzebegeleiding'. Daarin worden handreikingen geboden aan sekties bij het kiezen van een nieuwe methode voor hun school. Aan de hand van een aantal criteria kan men dan zelf bepalen welke richting ze met hun wiskunde-onderwijs op willen gaan. De methode die daar het best bij past kan vervolgens gekozen worden met behulp van het derde deel. Daarin worden de meest gangbare wiskundemethodes geanalyseerd. Op dit moment zijn er alleen nog analyses van mavo-delen. De komende jaren wordt dit echter uitgebreid voor de gehele onder- en later bovenbouw.
Een neerslag van dit werk is vanaf februari 1987 verkrijgbaar bij het KPC.

2 Het ondersteunen van wiskundesecties, van scholen die fuseren of van scholen die een heterogene brugperiode invoeren, bij het kiezen van een bij hun passend aanbod van wiskundemateriaal. We onderzoeken dan samen met de sectie welk aanbod van de leermiddelenmarkt voor hun school het meest geschikt is. Is dat niet te vinden dan wordt de mogelijkheid bekeken van het ontwikkelen of doen

ontwikkelen van nieuw lesmateriaal.

3 Het adviseren van auteursteams bij het opzetten van nieuwe wiskundemethodes en bij het herzien van bestaande methodes.
Bijvoorbeeld: Auteurs hebben een aantal hoofdstukken in concept klaar. Tevens hebben ze hun visie op het wiskunde-onderwijs (12-16) beschreven. Wij kunnen die hoofdstukken dan door een groot aantal docenten in de klas uit laten proberen. We vinden dat lesmateriaal pas goed is als het strookt met een duidelijke visie op wiskunde-onderwijs èn als er in de klas goed mee te werken valt (docent en leerling). De beoordeling van dit laatste aspect kan naar onze mening het best gebeuren door ervaren docenten. Zij zijn het die snel inzien wat wel en wat niet kan in een bepaald leerjaar van een school. Gelukkig kunnen we de meeste auteurs ook tot deze groep docenten rekenen.

Om bovengenoemde werkzaamheden te kunnen verrichten onderhoudt LOW kontakten met educatieve uitgeverijen, ontwikkelaars en docenten. Het opnemen van kontakt met LOW over zaken die op ons terrein liggen kan gebeuren via het Katholiek Pedagogisch Centrum (KPC, Postbus 482, 5201 AL 's-Hertogenbosch) of rechtstreeks.

Over de auteurs:

Willem van Gaans is docent wiskunde aan een categorale mavo-school en daarnaast verbonden aan de LPC, zeven jaar als lid van de vakbegeleidingsgroep wiskunde in het mavo-project en de laatste jaren als lid van het middenkader leermiddelenontwikkeling in het SiO-project.
Dolly van Drooge is docent wiskunde aan een dag- en avondschool voor volwassenen en daarnaast verbonden aan de LPC, zes jaar als lid van de vakbegeleidingsgroep wiskunde in het mavo-project en ruim een jaar als lid van het middenkader leermiddelenontwikkeling in het SiO-project.

Boekbesprekingen

Ross Honsberger, *Mathematical Gems III*, The Math. Association of America, 250 pag., $ 24.85

In 18 korte hoofdstukken worden onderwerpen vanuit diverse delen van de wiskunde behandeld. Om er enkele te noemen: combinatoriek meetkunde, graphen theorie, getaltheorie, cryptografie en algebra. Ook opgaven uit (inter)nationale wiskunde oplympiaden ontbreken niet, nu voorzien van oplossingen.
De behandeling is verre van oppervlakkig, maar steeds is elementaire wiskunde voldoende om de helder geschreven betogen te volgen. Verder maakt de grote verscheidenheid aan onderwerpen het werk uitstekend te consumeren.
Veel meer dan een studieboek is deze uitgave een expositie van juweeltjes die de wiskunde rijk is. Van harte aanbevolen voor een ieder die weet te genieten van wiskunde.

Harm Bakker

Catharine Anne Baker en Lynn Margaret Batten, *Finite Geometries, Lecture notes in pure and applied mathematics*, Vol. 103, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1985. Prijs: $ 83,–.

Van 9 t.e.m. 18 juli 1984 werd er in Winnipeg een conferentie gehouden over eindige meetkunde. Ruim vijftig voordrachten waren er te beluisteren, waaronder een van de Nederlanders A. Blokhuis, A. E. Brouwer en A. M Cohen. Dit boek bevat 31 van deze voordrachten.
De voornaamste deelgebieden, die vertegenwoordigd waren, zijn:

1 Klassieke eindige meetkunde,
2 De aktie van groepen op meetkundige structuren,
3 Eindige meetkunde vanuit combinatorisch perspectief,
4 Translatie vlakken, i.e. vlakken, waarvoor de groep van translaties transietief werkt op de affiene punten,
5 Diagrammen om meetkundes te klassificeren naar hun structuur.

Daarnaast vindt men in dit conferentieverslag nog de vier voordrachten van een uur, die Dr. P. J. Cameron gehouden heeft over projectieve meetkunde.

Henk C. A. van Tilborg

Doelen en toetsing bij toegepaste wiskunde: Een verkenning II

H. Boertien

Hieronder volgt het tweede deel van het artikel 'Doelen en toetsing bij toegepaste wiskunde: een verkenning'. Het eerste deel hiervan werd afgedrukt in het vorige nummer. Daarin worden mogelijke oplossingen besproken van een viertal opgaven. In elk van deze opgaven komt een of andere vorm van het toepassen van wiskunde aan de orde. Voor de leesbaarheid van dit tweede deel van het artikel worden ze hier nogmaals afgedrukt. Om het vervolg van dit artikel te volgen is het gewenst deze opgaven te maken alvorens men verder gaat lezen.

Voorbeeldopgaven

Opgave 1
Gegeven is de parabool $y = x^2 + 4$.
Opdracht
Bereken de straal van de cirkel met middelpunt $O(0,0)$ die de parabool raakt maar niet snijdt.

Opgave 2 (naar de Volkskrant van 23-07-84)

Sean Kelly komt 73 centimeter te kort
Villefranche – Zelden zal een renner met zo weinig verschil een tijdrit hebben gewonnen als afgelopen zaterdag Laurent Fignon in Villefranche-en-Beaujolais. Na 51 kilometer bleek de gele-truidrager 48 duizendste seconde sneller te zijn geweest dan Sean Kelly. Rekenkundigen wisten te vertellen dat Fignon met een voorsprong van 73 centimeter van de Ier gewonnen zou hebben als beide renners op hetzelfde tijdstip vertrokken zouden zijn. Daarbij wordt dan wel verondersteld dat ze in dat geval tijdens het koersen op de weg niet elkaars manier van rijden onderling beïnvloeden, bijvoorbeeld door bij elkaar in het wiel te rijden of door de snelheid aan die van de ander aan te passen.

Opdracht
Bereken zowel voor Fignon als voor Kelly de tijd in minuten en seconden (in drie decimalen nauwkeurig) die ze nodig hadden om de 51 kilometer af te leggen.
Bereken eveneens voor elk van beiden in kilometers per uur (in drie decimalen nauwkeurig) wat de gemiddelde snelheid over de af te leggen afstand was.

Opgave 3
Op een school voor VWO nam in 1986 10% van alle leerlingen van de leerjaren 5 en 6 geen wiskunde in hun vakkenpakket. Van de leerlingen die wel tenminste één wiskundevak A of B kozen, nam twee negende deel alleen het vak wiskunde B in het pakket op. Het vak wiskunde A wordt op die school twee maal zo vaak gekozen als het vak wiskunde B.
Opdracht a
Hoeveel procent van de leerlingen in de leerjaren 5 en 6 kozen alleen wiskunde A in hun vakkenpakket?
Opdracht b
Hoeveel procent van de leerlingen in de leerjaren 5 en 6 kozen zowel wiskunde A als wiskunde B in hun vakkenpakket?

Opgave 4
In de (dier)geneeskunde gebruikt men bij operaties van mensen en dieren dikwijls een injectiespuitje om een verdovings- of narcosemiddel direct in de bloedbaan te brengen. Men noemt dat 'intraveneus spuiten'. Hierdoor verspreidt het middel zich zeer snel door het lichaam waardoor de werking vrijwel onmiddellijk na de inspuiting maximaal is. Voor deze werking is uitsluitend van belang of de hoeveelheid verdovingsmiddel per kilogram lichaamsgewicht (concentratie) boven een bepaalde drempelwaarde ligt. Alleen in dat geval is er sprake van voldoende verdoving (narcose) om operaties uit te voeren.
Zodra het narcosemiddel in het lichaam is opgenomen begint het lichaam deze 'vreemde' stof af te breken. Bij de bepaling hoe lang het ingespoten organisme onder narcose blijft neemt men in het

algemeen aan dat er per tijdseenheid een vast percentage van de nog in het lichaam aanwezige stof wordt afgebroken. Men karakteriseert deze afbraaksnelheid veelal door middel van de 'biologische halveringstijd', dat is de tijd die het lichaam nodig heeft om 50% van de hoeveelheid van het verdovingsmiddel dat op zeker moment in het organisme aanwezig is, af te breken.
Het is niet gewenst de hoeveelheid toe te dienen narcosemiddel erg groot te kiezen omdat het middel dan allerlei bijwerkingen waaronder hersenbeschadigingen kan teweeg brengen. Daarom moet er bij elk narcosemiddel voor gezorgd worden dat er in het organisme gedurende de gehele operatie steeds minder narcosemiddel dan een bepaalde maximale hoeveelheid per kilogram lichaamsgewicht aanwezig is. Vandaar dat er bij langdurige operaties vaak niet in één keer een grote hoeveelheid narcosemiddel toegediend wordt, maar dat de toediening op enkele momenten tijdens de operatie wordt uitgevoerd. Verder streeft men er naar de concentratie van het narcosemiddel gedurende de operatie zo laag mogelijk te houden. Op de operatietafel dient men daarom het verdovingsmiddel vaak toe via een infuus. Maar praktische omstandigheden zorgen er voor dat lang niet altijd met deze wens rekening gehouden kan worden. Als er bijvoorbeeld geen infuus voorhanden is of wanneer het gebruik maken van een infuus niet uitvoerbaar is, is de genoemde manier van onder narcose brengen uiteraard niet mogelijk of soms niet geschikt. Wel kan men er altijd voor zorgen dat de concentratie van het verdovingsmiddel aan het eind van de operatie zo laag mogelijk is.
In het algemeen zijn de biologische halveringstijd, de drempelwaarde en de maximaal toegestane concentratie van een narcosemiddel per organisme verschillend. Deze waarden zijn voor het narcosemiddel 'NARCO' bijvoorbeeld voor een koe achtereenvolgens: 30 minuten, 30 en 180 (in milligram per kilogram lichaamsgewicht) en bij een hond achtereenvolgens: 15 minuten, 20 en 80 (in milligram per kilogram lichaamsgewicht).
Een dierenarts kent een aantal operaties die soms langer dan een half uur duren. Voordat hij een dergelijke operatie uitvoert maakt hij in het algemeen een plan waarin hij aangeeft op welke tijdstippen gedurende de operatie hij het best injecties met het narcosemiddel 'NARCO' kan geven en welke hoeveelheden van dit middel hij op elk van deze tijdstippen zal toedienen. Tijdens de operatie wil hij zo min mogelijk extra inspuitingen geven om niet uit zijn concentratie te geraken bij het inspannende werk. Daarbij houdt hij uiteraard rekening met wat voor het toedienen van het narcosemiddel nodig is en zoveel mogelijk met dat wat wenselijk is.
Opdracht a
Maak voor deze dierenarts een 'narcoseplan' voor een operatie van een koe van 500 kg die 45 minuten duurt. Dit plan moet aan de door hem gestelde eisen voldoen.
Beredeneer waarom het plan aan deze eisen voldoet.
Schets het verloop van de concentratie 'NARCO' in het lichaam van het dier.
Opdracht b
Dezelfde opdrachten als bij *a*, maar nu voor de operatie van een hond van 20 kg die eveneens 45 minuten duurt.

3 Oplossingsproces

3.1 Contexten

Bij het oplossen van een probleem moeten het oplossingsproces en de gevonden oplossingen betekenis hebben binnen de context waarbinnen het probleem beschreven is. De soorten contexten die men kan onderscheiden zijn in het algemeen te plaatsen tussen de twee uitersten: de formeel-wiskundige en de realistische context. De formeel-wiskundige context is nodig om de volle betekenis van de wiskundige kennis en vaardigheden goed te kunnen beschrijven, de realistische context geeft de mogelijkheid te laten zien hoe deze wiskunde gebruikt kan worden.
In de praktijk van het onderwijs zijn realistische situaties als uitgangspunt voor probleemstellingen niet altijd geschikt vanwege de veelheid van gegevens of vanwege de te complexe structuur daarvan. In plaats daarvan gebruikt men dan vaak zogeheten quasi-realistische situaties om de bijbehorende (te complexe) reële situatie zover te vereenvoudigen dat de leerlingen de daarbij geschikte vraagstellingen kunnen beantwoorden. Dergelijke situaties voldoen daaraan dat ze realistisch lijken. In elk geval dienen ze als zodanig voorstelbaar te zijn. De contexten die in het onderwijs gebruikt worden,

zijn daarom in te delen in formeel-wiskundige, quasi-realistische en realistische contexten.

.2 Bedenken van een oplossingsschema

Alle genoemde oplossingsmethoden bij de vraagstukken 1 t/m 4 in paragraaf 2.1 zijn effectief. Maar toch hebben ze elk hun voor- en nadelen wat betreft het gemak waarmee men ze bedenkt en uitvoert. In het volgende worden enkele regels weergegeven, die voor het vinden van een geschikte oplossingsmethode lijken te gelden.

Het bedenken van een oplossingsmethode hangt steeds samen met het al dan niet bewust kiezen van 'sleutels' in de probleembeschrijving of in de vraagstelling. Met deze sleutels kiest men een meer of minder abstract schema om te gebruiken voor een vertaling van het probleem met zijn vraagstelling.

In opgave 1 zijn dat de termen '(straal van de) cirkel' en 'raakt' met hun onderlinge relatie.

In opgave 2 de gedachte dat het nodig is zich een goede voorstelling te maken van de situatie, de voorstelling zelf en de bij die voorstelling behorende relatie $s = v \times t$.

In opgave 3 kan men verschillende soorten sleutels kiezen. Een eerste is de gedachte om een groep leerlingen uit te splitsen in disjuncte subgroepen en die uitsplitsing zelf via een graaf weer te geven.

Een tweede is de gedachte dat de vakkenpakketten het mogelijk maken de verzameling van alle leerlingen te beschouwen als een structuur van deelverzamelingen. De hierbij behorende beschrijving kan op verschillende manieren gebeuren, bijvoorbeeld met behulp van een Venndiagram, met getallen uit het tweetallig stelsel of met een kruistabel.

Een derde is de idee om daarbij numerieke variabelen in te voeren met hun onderlinge relaties (vergelijkingen).

In opgave 4 tenslotte is de sleutel gelegen in de gedachte aan groeimodellen, aan het begrip halfwaardetijd en een adequate voorstelling van de situatie.

Al deze sleutels leiden tot het gebruiken van meer of minder abstracte schema's. De geschiktheid van zo'n schema is afhankelijk van de eenvoud waarmee men de gegevens van het probleem daarin kwijt kan, van het gemak waarmee men de vraagstelling daarmee kan vertalen en van het gemak waarmee men er een oplossingsplan bij kan bedenken. Men kan dit schema waarop het te bedenken oplossingsplan gebaseerd is daarom ook aanduiden met oplossingsschema.

Richtlijnen voor het kiezen van een geschikt schema zijn samen te vatten in: streef naar vereenvoudiging van het probleem.

Dergelijke richtlijnen zijn dan bijvoorbeeld:

* Kies dat schema waarin de opgave zo eenvoudig mogelijk geherformuleerd kan worden; kies de in te voeren variabelen zo, dat de vraagstelling hierdoor eenvoudig wordt
* voer bij de keuze zo min mogelijk variabelen in
* kies een schema zo, dat uit (de kenmerken van) het schema de relaties tussen de in te voeren variabelen eenvoudig zijn af te lezen.

3.3 Abstraheren van de werkelijkheid

Bij het herformuleren van een opgave wordt er gesubstitueerd. Zo worden bijvoorbeeld begrippen vervangen door variabelen of door algebraïsche vormen en worden meer of minder concrete relaties door functies, vergelijkingen en ongelijkheden vervangen. Het meest opvallend is hierbij dat de vervangende begrippen en relaties abstracter zijn dan die welke vervangen worden. Bij de vertaling van het probleem is het abstraheren blijkbaar een must. Niet gegeven is in hoeverre men moet abstraheren. Er kan bijvoorbeeld gekozen worden voor een oplossing waarin de variabelen en relaties niet expliciet gedefinieerd en ingevoerd worden. Zo is het bij de eerste oplossingsmethode van de derde opgave niet nodig om de variabelen a en x in te voeren. Abstraheren is in principe het vervangen van begrippen of relaties, die in een beperkte context betekenis hebben, door begrippen of relaties, die betekenis hebben in een veel algemenere context. Daarbij wordt beschikbare informatie weggelaten of samengevat. Bij het tweede vraagstuk vervangt men bijvoorbeeld de context van het verrijden van een tijdrit in de Tour de France door een context van plaats-tijd-diagrammen. Daarbij zijn de hobbels in de weg, de eventueel lekke banden en de perioden waarin de renners even 'stuk' zaten, verdwenen en is de in werkelijkheid onregelmatige voortbeweging van de wielrenners vervangen door een eenparige rechtlijnige beweging. Door deze substitutie zijn de gebruiksmogelijkheden van de vertaalde begrippen en relaties veel groter dan die van de oorspronkelijke. Men zou dit vervangen van relatief constante begrippen of relaties door meer

variabele en abstracte begrippen en relaties het variëren van constanten kunnen noemen.
In veel toepassingssituaties wordt er geabstraheerd van de zogeheten 'toevallige' afwijkingen of wordt er een of ander verband benaderd door een eenvoudiger verband, dat door een exacte formule gegeven wordt (idealiseringsproces). Bij deze benaderingen van getallen en verbanden wordt er in feite informatie als minder van toepassing verklaard. Bij de interpretatie van de (tussen)resultaten moet daar echter wel rekening mee gehouden worden.
Een opvallend kenmerk van de problemen die op realistische situaties gebaseerd zijn, is dat er vaak irrelevante informatie gegeven is. Deze overbodige informatie in de opgaven moet tijdens het kiezen van het oplossingsschema en het abstractieproces weggelaten worden.

3.4 Oplossingsschema als (startpunt van een) strategie
Het oplossingsschema vormt de basis van een oplossingsplan. Delen van dit schema of het schema als geheel 'verwijzen' naar voor de hand liggende bewerkingen die men bij de gegevens kan uitvoeren. Anderzijds komt idealiter een herformulering van een probleem tot stand in het kader van een oplossingsplan. Dit plan kan men dan beschouwen als de doelgerichte structuur die in het totale oplossingsproces is te onderkennen en is abstract van aard. Door het oplossingsplan verder concreet in te vullen verkrijgt men een oplossingsmethode.
Een oplossingsplan kan zodanig zijn dat daarmee tevens de uitvoering ervan in een oplossingsmethode al volledig vast ligt. Maar ook kan zo'n plan nog veel mogelijkheden open laten voor het kiezen van een oplossingsmethode. Een veel voorkomende vorm van open laten hoe de feitelijke oplossing van het probleem zal verlopen, bestaat daarin dat in het plan is voorzien, dat op grond van tussenresultaten beslist gaat worden hoe men verder zal gaan. Een plan van de vorm 'eerst maar eens de eerste stap doen en daarna zien we verder' komt in de praktijk veel voor. Omdat zo'n oplossingsplan veel open laat, kan het het best aangeduid worden met de term 'strategie'.
Het aanwezig zijn van overbodige informatie en 'toevallige' afwijkingen in een opgave maakt het moeilijker een begin van een oplossingsplan te vinden en heeft tot gevolg dat er meer vrijheid is in de keuze van de uitwerking van dat plan. Bij de opgaven 1, 2 en 3 is er bijvoorbeeld weinig vrijheid in de uitwerking van een oplossingsplan wanneer dit via de 'sleutels' is opgesteld, maar bij opgave 4 is er na de keuze van het oplossingsplan nog een grote variatie in uitwerkingen en eindantwoorden mogelijk. Het meer of minder open zijn van een opgave speelt hierbij een rol. Naarmate een probleem meer (irrelevante) informatie bevat en de vraagstelling meer open is, d.w.z. dat er zeer veel effectieve oplossingsmethoden te bedenken zijn, wordt het vinden van een goede oplossing meer afhankelijk van het volgen van een goede oplossingsstrategie.

3.5 Logica
De manier waarop een ideaal vertalingsproces en het bedenken van een oplossingsplan plaatsvindt, voldoet aan zekere criteria die aan een logica ontleend worden. Deze logica volgens welke men bij het probleemoplossen te werk gaat, bevat de criteria voor het beoordelen van beweringen en hypothesen en van de mogelijkheden om gegeven informatie te bewerken. Zij is deels deductief en formeel en deels informeel van aard. Dit informele aspect van de logica treedt bijvoorbeeld op wanneer men inschat welke benaderingen van verbanden geschikt zijn, welke afwijkingen men bij die inschattingen kan verwachten en welke betekenis men mag hechten aan een gegeven bewering in een realistische context.

3.6 Herkenning van oplossingsschema's
Uit het voorgaande wordt duidelijk dat het bij problemen, die beschreven zijn in een (quasi-)realistische context en die met behulp van wiskundige kennis en vaardigheden opgelost moeten worden, nodig is een meer of minder abstract schema te gebruiken. Als een leerling het benodigde (abstracte) schema kent, dan moet hij dat in de opgave proberen te herkennen door het probleem met zijn context en/of de vraagstelling op de een of andere manier te gaan vertalen. Met andere woorden hij zal een oplossingsplan moeten opstellen dat begint met deze vertaling. Maar als het benodigde schema niet in zijn hoofd aanwezig is, helpt de poging om het probleem te vertalen hem niet. De weg naar de oplossing wordt dan niet herkend. In dat geval is voor hem het enige alternatief zèlf een voor de oplossing bruikbaar schema te bedenken. In het algemeen blijkt dit voor leerlingen een zeer zware

eis. Wanneer bij een dergelijk probleem meer dan één (abstract) schema te gebruiken is, geldt een analoge redenering. In dat geval moet er door vertaling één van de mogelijk te gebruiken schema's herkend worden. Dit betekent dat één van de moeilijkheden om een effectief oplossingsplan te vinden voor problemen die in (quasi-)realistische contexten beschreven zijn, bestaat uit het herkennen van een bekend abstracter probleem. Treffend in dit kader is dat van een 5-vwo-klas van 29 leerlingen die over enkele maanden bevorderd zouden worden naar 6-vwo, er slechts 3 in staat waren opgave 3 goed te maken. De rest maakte denkfouten van allerlei aard. De verklaring hiervoor kan zijn dat er in het onderwijs erg weinig aandacht wordt besteed aan modellen die structuren van deelverzamelingen of combinatoriek betreffen. Hierdoor is het waarschijnlijk dat er in de hoofden van de meeste leerlingen geen abstract schema aanwezig is, dat herkend kan worden en dat kan dienen om de gegeven informatie in opgave 3 op een adequate manier te representeren.

4 Toegepaste wiskunde versus zuivere wiskunde wiskunde

Bij een zuiver wiskundig probleem is het benodigde abstracte model meestal reeds gegeven. Vergeleken met een meer realistisch probleem wordt er in het totale oplossingsproces daardoor veel minder een beroep gedaan op de vaardigheden die behoren bij het kunnen vertalen van problemen en bij het kunnen beoordelen van (tussen)resultaten op hun betekenis (voor het gevolg van het oplossingsproces). Het oplossingsproces als zodanig is bij niet-realistische problemen minder complex van structuur omdat minder eisen gesteld kunnen worden aan het kunnen abstraheren (dat nodig is voor het kunnen vertalen van het probleem) en aan het kunnen onderscheiden van welke informatie relevant is.

Bij toegepaste wiskunde moet daarom in het onderwijs relatief veel aandacht gegeven worden aan:

* het plan volgens welke men een probleem *kan* oplossen
* het nagaan op welke wijzen het probleem vertaald *kan* worden
* de logica volgens welke men oplossingsstappen achtereenvolgens gaat bedenken en uitvoeren
* de criteria volgens welke men situaties en (tussen)-resultaten *kan* beoordelen en interpreteren.

Alleen wanneer aan deze aspecten aandacht is besteed, schept men de voorwaarden voor leerlingen om wiskundige kennis en vaardigheden in diverse probleemsituaties flexibel te gebruiken (transfer). Maar het scheppen van voorwaarden voor het aanleren van transfer van wiskundige kennis en vaardigheden is geen garantie dat de leerling hiervan gebruik maakt.
Omdat bij Wiskunde A juist in sterke mate op deze transfer een beroep gedaan wordt, zou dit vak hierdoor voor veel leerlingen wel eens moeilijker kunnen zijn dan menigeen vermoedt.

5 Onderwijs in toegepaste wiskunde

Een passend uitgangspunt voor een toepassingsgericht wiskunde-onderwijs is te verwoorden met: 'Wiskunde is denktechniek'. Gezien het voorgaande betekent dit dat er met name aandacht gegeven moet worden aan het leren gebruik maken van wiskundig verantwoorde methoden voor het vereenvoudigen van problemen die in een (quasi-)realistische context gegeven zijn. Voor een deel zijn deze informeel van aard. Dergelijke methoden berusten op het vinden van een geschikte vertalingsmogelijkheid via abstraheren van de werkelijkheid. De manier waarop deze abstractie gebeurt, moet bij de interpretatie van de verkregen uitkomsten nader verdisconteerd worden. Opmerkelijk is dat de wiskundige kennis en vaardigheden waarvan men gebruik maakt, pas in tweede instantie van belang is. Daarom komt het accent in dit onderwijs te liggen op de probleemaanpak en op de wiskundige houding. Het antwoord op de vraag hoe men leerlingen een wiskundige houding moet bijbrengen is niet alleen een zaak van het overdragen van een cognitief standpunt. Als men zich namelijk ertoe beperkt de leerlingen te vertellen hoe ze wiskundig verantwoord problemen dienen op te lossen, dan blijkt dit in de praktijk zeer weinig effect te hebben. De oplossing zou wel eens daarin kunnen liggen dat men met een opvoedingsgerichte benadering de leerlingen moet *overtuigen* van het nut en de wenselijkheid om een goede wiskundige houding na te streven. In het bijzonder zal dit moeten gebeuren

wanneer men met de leerlingen gaat bespreken hoe men opgaven *kan* aanpakken.

5.1 Leerdoelenbeschrijving

Een beschrijving van de leerdoelen bij het onderwijs zoals dat in hoofdstuk 4 genoemd is, dient weer te geven dat er speciaal ten aanzien van het oplossingsproces eisen aan de leerlingen gesteld worden, die bij *elk* wiskundig onderwerp aan de orde gesteld kunnen worden. Het ligt dan voor de hand deze eisen apart te verwoorden in onderwerponafhankelijke leerdoelen. Het oplossingsproces is daarmee te karakteriseren onafhankelijk van de formele wiskundige inhoud waarop het betrekking heeft.
Voorbeelden van dergelijke leerdoelen, die het oplossen van een probleem betreffen, zijn:

1 Een oplossingsplan voor het probleem kunnen bedenken.
2 Kunnen beoordelen of een oplossingsplan geschikt is om er het probleem mee op te lossen.
3 Kunnen beoordelen of een model geschikt is om er het probleem mee op te lossen.
4 Relevante gegevens kunnen scheiden van irrelevante gegevens.
5 Gegevens adequaat kunnen representeren met behulp van de verschillende representatievormen, bijvoorbeeld verbanden tussen grootheden die met behulp van tekst gegeven zijn, kunnen vertalen in een tabel, in formules, in een (functie-)relatie of in een grafische voorstelling.
6 Gegevens kunnen beoordelen op volledigheid en op onderlinge (on)afhankelijkheid en tegenstrijdigheid.
7 Verkregen resultaten betekenis kunnen geven (in de context).

Daarnaast zal men de onderwerpafhankelijke doelen in het onderwijs moeten beschrijven. Het is vanzelfsprekend daarvoor zeven onderwerpen uit de wiskunde te onderscheiden, namelijk:

* functies
* verandering en variatie
* lineair programmeren
* matrices en grafen
* kansverdelingen
* beschrijvende statistiek
* automatische gegevensverwerking.

Het is niet de bedoeling dat de algemene doelen los gezien worden van een onderwerpspecifieke invulling, omdat ze op zich geen speciale betekenis voor het vak wiskunde A hebben. Juist door ze te verbinden met een vakspecifieke invulling krijgen ze hun betekenis. Ook is het niet de bedoeling dat de onderwerpsgewijze indeling van de doelen voor het vak wiskunde A stringent gehanteerd wordt. Met name de onderlinge integratie van de vaardigheden die bij de verschillende onderwerpen aan bod komen, is één van de belangrijkste doelen van het onderwijs in dit vak. De gegeven indeling in onderwerpen is slechts een opsomming van wiskundige modellen in wiskunde A-opgaven die in diverse vormen van onderlinge samenhang gebruikt kunnen worden.

5.2 Toetsing

Het toetsen van een leerdoel kan op verschillende manieren gebeuren. Van belang daarbij is of de context waarbinnen de toetsing plaatsvindt bruikbaar is om het leerdoel te toetsen. We spreken dan van een functionele context. Deze kan formeel-wiskundig, realistisch of quasi-realistisch zijn. Een functionele context voor het toetsen of een leerling in staat is functies te differentiëren kan bijvoorbeeld formeel-wiskundig van aard zijn. Een functionele context voor het toetsen of een leerling in staat is differentiaalrekening toe te passen, kan realistisch of quasi-realistisch zijn.
Een eis die men aan een realistische context dient te stellen, is dat de erin voorkomende gegevens zo goed mogelijk de realiteit benaderen. Bij het gebruiken van een quasi-realistische context dient men er op te letten dat de leerling niet door de gegevens in verwarring raakt, bijvoorbeeld doordat hij een tegenstrijdigheid met de werkelijkheid ontdekt. De eis die men dan in feite stelt, is dat de context voorstelbaar moet zijn.
Bij toetsing kan men verschillende toetssituaties voor ogen hebben. Enkele van deze toetssituaties zijn: voortgangscontrole in het onderwijsleerproces, schoolonderzoek en centraal schriftelijk eindexamen. Deze bepalen in hoge mate hoe complex de daarin te gebruiken geschikte opgaven kunnen zijn en aan welke andere eisen ze moeten voldoen. Leerlingen kunnen de beheersing van aangeleerde wiskundige vaardigheden demonstreren door daarvoor geschikte problemen op te lossen of daar-

voor geschikte opdrachten uit te voeren. Een goed uitgangspunt voor het maken van opgaven is nauwkeurig te formuleren wat men wil toetsen om vervolgens na te gaan hoe men kan toetsen. Vaak levert een directe manier van vragen de beste toetsvragen op. Zo kan men bijvoorbeeld het eerste algemene leerdoel dat in paragraaf 5.1 genoemd wordt, heel goed toetsen door de leerlingen te vragen op te schrijven hoe zij een gegeven probleem zouden kunnen (willen) oplossen.
In het algemeen geldt dat naarmate de vraagstelling meer open is, het moeilijker is om de door de leerlingen gegeven antwoorden te beoordelen. Open vraagstellingen en een eenduidig beoordelingsmodel staan namelijk vaak met elkaar op gespannen voet.
Een open vraagstelling is algemener dan een meer gesloten vraagstelling. Het open zijn van een vraag kan zich op twee manieren uiten. In de eerste plaats doordat een aantal gegevens die aan het probleem toegevoegd kunnen worden, niet vermeld worden. In de tweede plaats doordat de vraagstelling weinig aanwijzingen geeft in welke richting men de oplossing moet zoeken. Hierdoor wordt bereikt dat leerlingen bij het vinden van een goed oplossingsplan van meer initiatief en meer creativiteit blijk moeten geven, maar ook heeft zo'n vraagstelling tot gevolg dat leerlingen de vraagstelling in veel gevallen zeer veelzijdig kunnen interpreteren. De grotere keuzevrijheid voor de leerlingen bij het oplossen leidt er dan toe dat het aantal antwoordmogelijkheden soms niet te overzien is. In al deze gevallen is het vinden van een goed antwoordmodel voor de beoordeling van de antwoorden van de leerlingen moeilijk. Het uitsluiten van de mogelijkheden om de opgave zeer uiteenlopend te kunnen interpreteren, is veelal alleen mogelijk door het toevoegen van extra informatie of door de vraagstelling meer te detailleren, bijvoorbeeld door deze op te splitsen in enkele deelvragen. Dit levert echter een minder open vraagstelling op.

Over de auteur:

H. Boertien is sedert 1977 werkzaam bij het Cito als vakmedewerker wiskunde.

Van de bestuurstafel.....

Het begin van 1987 was voor het bestuur een drukke tijd. Allerlei 'hete hangijzers' vergden veel vergadertijd, zodat een extra bestuursvergadering ingelast moest worden. Hieronder volgt een verslag van de bestuursvergaderingen van 14 januari, 11 en 25 februari.

Euclides

In het begin van deze jaargang dreigde het even mis te lopen met de uitgave van ons 'clubblad'. Om uiteenlopende redenen waren een paar belangrijke medewerkers gestopt en er was een gebrek aan goede kopij. Echter onder de bezielende leiding van Fred Goffree voerde de redactie een red-actie uit die de dreigende crisis afwendde en het bestuur met grote dankbaarheid vervulde. In nauwe samenspraak met het bestuur en de uitgever heeft de redactie de gelegenheid aangegrepen om de gehele structuur van Euclides eens tegen het licht te houden en een aantal veranderingen aan te brengen. Hopelijk zullen de lezers de gevolgen van deze activiteiten in de komende nummers terugvinden in de vorm van een nog beter leesbaar blad. En wie weet, worden vele lezers, daardoor geïnspireerd, schrijvers.

Jaarvergadering 1987

De didactiekcommissie is al lang druk bezig met het voorbereiden van het themagedeelte van onze jaarlijkse studiedag, dat als titel zal krijgen: 'Bewijzen'. U zult er ongetwijfeld in Euclides meer over lezen. De prestaties van deze groep bij het organiseren van vorige studiedagen staan er borg voor dat het weer een waardevolle dag zal worden.
Door de sterk gestegen prijs van de SOL-locatie in Utrecht, was het bestuur genoodzaakt naar een ander onderkomen om te zien. We menen die gevonden te hebben in het Nieuwe Lyceum in Bilthoven. Daardoor zullen we waarschijnlijk ook in staat zijn om het huishoudelijk gedeelte van onze jaarvergadering wat minder rommelig te laten verlopen. Ook het bestuur heeft zich geërgerd aan de storingen, die met name de rondvraag ontsierden, doordat de vergaderruimte in de SOL niet voldoende afgeschermd kon worden. Het Nieuwe Lyceum biedt ons daartoe betere mogelijkheden.

Examenbesprekingen mavo/lbo 1987

Het bestuur hecht grote waarde aan de contacten met het veld die middels de examenbesprekingen tot stand komen. Geluiden, daar opgevangen, worden elk jaar door het bestuur gebundeld en aan de betrokken commissies doorgegeven. Dit is temeer noodzakelijk, nu de omstreden 70/30% regeling van kracht is geworden. We hebben grote zorgen dat de kwaliteit van het wiskunde-onderwijs door deze maatregel ernstig wordt aangetast. Ons plan is om een aantal leraren uit te nodigen om een enquête bij vijf van hun leerlingen af te nemen, direct na het examen, dus 'heet van de naald'.
Zodoende willen we inzicht krijgen in de manier waarop de kandidaten met deze nieuwe vorm van het examen omgaan. Hoe komen foute antwoorden tot stand, hoe vaak wordt er gegokt, of per ongeluk een goed antwoord gevonden? Het zou een goede zaak zijn, als veel collega's uit het mavo en lbo de komende besprekingen zouden bezoeken. Misschien kunnen we met hun reacties de beleidsmakers overtuigen dat de huidige weg een heilloze weg is.

Hawex

Vreugdevolle berichten van dit front: er komt een kortlopend experiment met de voorgestelde examenprogramma's HA en HB. De scholen krijgen in het voorjaar een Hawex-circulaire alsmede het definitieve rapport van de Havo-commissie. Er wordt in het komend cursusjaar gestart op drie scholen, elk met één groep HA en één groep HB naast de 'gewone' wiskunde. In het volgend jaar komen er 22 experimenteerscholen bij. In die tweede fase zullen er op de 25 scholen geen oude programma's meer draaien in de vierde klas. In '89/90 moeten alle scholen de twee nieuwe programma's invoeren, zodat in '91 de eerste landelijke eindexamens HA en HB plaatsvinden.

Werkgroep Differentiaalvergelijkingen

Op initiatief van het bestuur is er een werkgroep gevormd die zich gaat bezighouden met het probleem van de differentiaalvergelijkingen en hun plaats in de wiskunde-examens. De werkgroep zal gevormd gaan worden door vertegenwoordigers van het wetenschappelijk onderwijs, lerarenopleidingen, inspectie en auteursgroepen.

L. Bozuwa

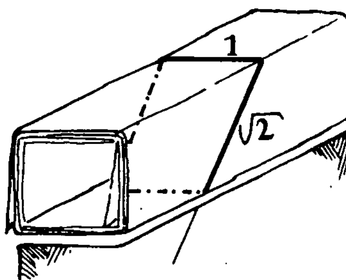
De Wageningse Methode derde en vierde leerjaar

P. G. J. Vredenduin

Het eerste en tweede leerjaar van deze methode is besproken in *Euclides* 59 (1983-84), nr. 10 blz. 459-470. Thans zijn ook de boekjes voor het derde en vierde leerjaar gereed. Ze zijn weer eerst in de vorm van een experimentele uitgave verschenen. Elk deel is door de auteur in zijn klas getoetst en zo nodig gewijzigd. Waarna de definitieve uitgave tot stand gekomen is.
De uitgave bestaat uit 10 boekjes voor het derde leerjaar en 8 voor het vierde, t.w.
voor het derde leerjaar:
24 ongelijkheden
25 vectoren
26 relaties
27 goniometrie
28 rechte lijnen
29 wortels
30 formules en figuren
31 vergelijkingen 3
32 functies 1
33 gebieden
en voor het vierde leerjaar:
34 algoritmen
35 functies 2
36 differentiëren 1
37 kansen
38 exponentiële functies
39 inhouden
40 periodieke functies 1
41 differentiëren 2.
De gemiddelde omvang van de boekjes is 37 resp. 35 blz.

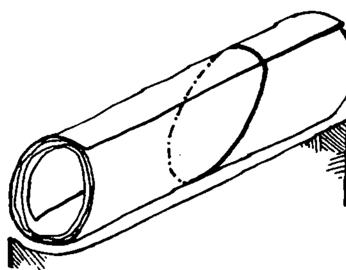
De auteurs gaan uit van de volgende principes:
- de theorie wordt door de leerlingen zelf ontdekt aan de hand van voorbeelden uit de praktijk
- alleen bij hoge uitzondering ontwikkelt de auteur zelf een stukje theorie
- nadat voldoende inzicht verkregen is, vat de auteur de verkregen resultaten kort samen
- ook de oefeningen gaan als regel over aan de praktijk ontleende problemen
- de hoeveelheid kale wiskunde is tot een minimum beperkt.

De leergang is hierdoor een uitstekende voorbereiding voor wiskunde A. Maar doordat de begrippen op correcte wijze ontwikkeld worden, komen ook aanstaande B-leerlingen niet te kort.
Bij wijze van voorbeeld wil ik één boekje nader onder de loep nemen. Ik heb daarvoor gekozen: periodieke functies 1.
We maken een vierkante rol papier en snijden deze onder een hoek van 45° met een plat vlak (figuur 1).



Figuur 1

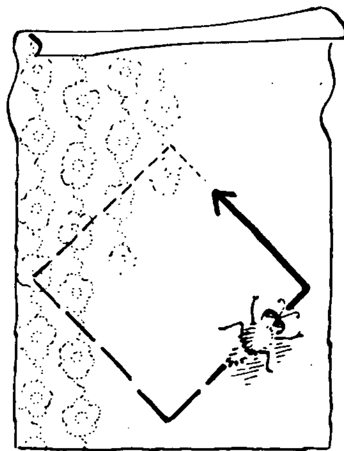
De rol wordt uitgerold en de leerling moet tekenen wat hij te zien krijgt.
Daarna doen we hetzelfde met een ronde rol (figuur 2).



Figuur 2

De leerling krijgt zo reeds een impressie van een periodieke functie, zonder dat expliciet dit begrip ter sprake komt.
Dan volgt de grafiek van de stand van de grote en van de kleine wijzer van een klok gedurende een periode van 12 uur. De grafiek kan voortgezet worden. Eerst nu duikt de term 'periodieke functie' op. Kenmerkend is: 'Na een zekere tijds*periode* krijg je steeds weer dezelfde output.' Daarna volgt de grafiek van de longinhoud bij één diepe ademhaling. De leerling wordt gevraagd de grafiek verder te tekenen. 'Als een stuk grafiek zich steeds herhaalt, spreken we van een *periodieke grafiek*. De tijdsduur van het zich herhalende stuk heet de *periode*.'
Nu het begrip gelegd is, laat men de teugels wat vieren. Er volgen praktijkvoorbeelden die, hoewel ze niet exact periodiek zijn, een periodiek karakter hebben. Eerst een cardiogram. Dan de met een oscillograaf verkregen grafieken van de tonen voortgebracht door een trompet, een klarinet en een viool. We zien het verband tussen deze grafieken en toonhoogte (frequentie), volume en klank. Dan nog een grafiek van de verschillende telefoontonen (verbindingstoon, bezettoon, informatietoon) en een grafiek van de waterstanden ten gevolge van eb en vloed.

Na dit alles wordt het tijd voor een korte samenvatting. Waarna met het zo verkregen begrip nog even doorgeoefend wordt. Dan volgt een herhaling van ons tweede voorbeeld: de doorgesneden ronde papierrol. Als straal van de rol kiezen we 1. De rol wordt uitgerold en de auteur tekent zelf de grafiek die hij dan krijgt. De periode blijkt 2π te zijn, de grootste output 1. 'De grafiek... is een zeer regelmatige golflijn. Zo'n golflijn komt vaak voor; hij wordt *sinusoïde* genoemd'. Enkele voorbeelden: het door de oscillograaf weergegeven geluid van een stemvork, het zijaanzicht van een spiraal. Deze begripsvorming is uiteraard nog vaag. Bedoeling van de auteur is de leerling alvast een vage notie bij te brengen van een begrip dat later gepreciseerd zal worden (in dit boekje).
Het volgende voorbeeld van een periodieke grafiek is de baan die het ventiel van een fietswiel beschrijft, als de fiets rijdt. Deze kromme heet cycloïde.
Het wordt nu langzamerhand tijd de koe bij de horens te pakken en over te gaan op de goniometrische functies. Daartoe eerst nog een aardig voorbereidend probleem.
'Een beestje kruipt over het behang in een vierkante baan. Na elke ronde kruipt het gewoon door, steeds met dezelfde snelheid'. (figuur 3)



Figuur 3

We tekenen de baan na in een assenstelsel. De hoekpunten van het vierkant zijn $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$. Op het tijdstip 0 is het beestje in $(1,0)$; zijn snelheid is 1. De coördinaten van het beestje noemen we hoogte en breedte. Deze zijn functies van de tijd. We noemen ze Hoog en Breed. Van deze functies worden grafieken getekend.
Ik moet eerlijk zeggen dat ik hier wat kregel word. Waarom wordt er een beest ten tonele gevoerd dat gedoemd is ten eeuwigen dage vierkantjes over het behang te lopen? En dat terwijl het uiteindelijk gaat over een punt dat zich t.o.v. een assenstelsel beweegt. Ik vind praktijkvoorbeelden erg nuttig, maar heb een hekel aan anti-praktische situaties. Wat niet wegneemt dat het probleem als zodanig een uitstekende voorbereiding is voor sinus en cosinus.
Deze komen dan ook nu aan de orde. Een kraal wordt rondgeslingerd in een cirkelvormige baan. Deze heeft de oorsprong als middelpunt en straal 1. De kraal draait in positieve richting en heeft snelheid 1. Weer worden grafieken getekend van de hoogte en de breedte van de kraal als functie van de tijd. Deze functies noemen we sinus en cosinus.
'De grafieken van sin en cos zijn sinusoïden. Andere functies waarvan de grafiek een sinusoïde is,

worden hiervan afgeleid'. Uit de voorbeelden blijkt dan later dat sinusoïden zijn de grafieken van de functies $a \sin(bx + c) + d$ $(a \neq 0, b \neq 0)$, maar dit wordt niet expliciet meegedeeld. Naar de letter blijft de begripsvorming hier dus ietwat vaag. De leerling heeft hier in zoverre geen last van dat hem geheel duidelijk wordt wat een sinusoïde is. De exacte formulering zou dit de leerling niet duidelijker maken, maar zelfs een nodeloze belasting voor hem kunnen zijn. Daarom wordt deze achterwege gelaten. De auteurs van De Wageningse Methode zijn vijanden van theoretische zwaarwichtigheid.
De essentie van het boekje is hiermee beschreven. Wat nu nog volgt, is een uitvoerig trainen met de functies sin en cos, waarbij ook $1 + \sin x$, $\sin 2x$, $\cos -1 \cdot \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$ aan de orde komen.
Ten slotte nog een samenvatting:
'$f(x) = a \cdot \sin(px + q) + b$ (met $a \neq 0$ en $p \neq 0$)
De grafiek van f is een sinusoïde met:
* periode $\frac{1}{p} \cdot 2\pi$
* gemiddelde output b
* amplitude $|a|$'

Evenals alle andere boekjes eindigt dit deeltje met een zelftoets en met de rubrieken 'extra werk' en 'extra sterk'. Deze zijn bestemd voor leerlingen die wat extra training nodig hebben resp. leerlingen die behoefte hebben aan wat moeilijker opgaven.

Auteurs van de deeltjes 24-33 zijn: Leon van den Broek, Wim Kremers, Simon Schoone, Anje Stolp, en van de deeltjes 34-41: Leon van den Broek, Wim Kremers, Jan Smit, Gerard Stroomer.
Uitgever is Meijer & Siegers, Oosterbeek.
De prijs van 24-33 bedraagt *f* 17,50, die van 34-41 eveneens *f* 17,50.

Boekbesprekingen

Prof. dr. O. Bottema, *Theoretische mechanica*, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 237 blz., *f* 34,50.

'De mechanica is een van die klassieke onderwerpen, waarmee iedere beoefenaar van de exacte wetenschappen in aanraking komt. In dit boek wordt een inleiding gegeven in dit vakgebied, waarbij in elk hoofdstuk een deel van de algemene theorie wordt ontwikkeld. De theorie wordt geïllustreerd door een groot aantal klassieke voorbeelden zoals de planetenbeweging, de mathematische en de cycloïdale slinger, de bolslinger, de slinger van Foucault, wrijving en stootverschijnselen, de tolbeweging.'
Het boek, dat als gecorrigeerde herdruk van de uitgave uit 1970 verschijnt behandelt achtereenvolgens:
de kinematica van het punt; de dynamica van het massapunt; arbeid en arbeidsvermogen; de algemene theorema's voor mechanische stelsels; starre lichamen; de beweging van mechanische stelsels; de vergelijkingen van Lagrange; relatieve beweging; de beweging van een lichaam in de ruimte.
Een register sluit het boek af.
Een bijzonder goed leerboek der mechanica, helder geschreven, overzichtelijk gepresenteerd, voorzien van talrijke voorbeelden.

W. Kleijne

L. Narici and E. Beckenstein, *Topological vector spaces*, M. Dekker Inc., New York-Basel, 1985, prijs: $ 83,50.

The present book offers an excellent survey of the theory of topological vector spaces and is certainly recommendable for those who are not merely interested in functional analysis in normed linear spaces. After some introductory chapters on topological vector spaces (in which important notions as absorbent and balanced sets, (local) convexity, seminorms, metrizability, barelled spaces, webbed spaces and bornological spaces are introduced), the book deals mainly with some highlights of functional analysis. We mention the Hahn-Banach extension theorem, the Krein-Milman theorem, the Banach-Steinhaus theorem, the open mapping and closed graph theorems and the Krein-Smulian and Smulian-Eberlein theorem. This book is undoubtedly a welcome supplement for those who are familiar with the basic theory of Banach spaces and Hilbert spaces.

C. B. Huijsmans

De 'C.I.E.A.E.M.'

Jan Karel Timmer

Na de bevrijding werd ik lid van de W.V.O. (Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Onderwijs en Opvoeding, speciaal van de WWG (Wiskunde WerkGroep). De afdeling Amsterdam van eerstgenoemde had samen met die van de Vereniging voor Paedagogiek een Fransman uitgenodigd een lezing te houden. Wegens een misverstand kwam het voorzitterschap daarvan te elfder ure bij mij terecht. Als zoiets moet, dan lukt het ook wel, welke opmerking dient als aanmoediging: vrees geen internationaal contact! Later bleek in de WWG, dat enige Nederlanders konden deelnemen aan een wiskunde-onderwijs-conferentie in Londen. Gesterkt door de eerder genoemde ervaring gaf ik mij op, en wel met nog twee enthousiastelingen, Wansink en Bunt.

De conferentie werd gedurende twee weken rond de Paasvakantie 1950 gehouden in Debden, in de fraaie omgeving van Epping Forest. Het was de eerste samenkomst van de C.I.E.M. (Commission Internationale pour l'étude et l'améliorition de l'Ensignement des Mathématiques). Later is die naam aangeduid met het opschrift van dit artikel, waarmee terecht een beter accent werd gelegd op de studie en de verbetering van de wiskunde-didactiek. Hoewel die toen niet veel verder ging dan: 'Ik doe het zus en jij doet het zo' denk ik toch met grote dankbaarheid terug aan de ervaringen van toen. Het centrale thema van de conferentie in 1950 kan vertaald worden in vraagvorm: 'Passen onze wiskundeprogramma's wel bij de capaciteiten van de leerlingen?' Die vraag is nu nog actueel! Ook hier ontbrak (de eerste week) een voorzitter, zodat we er zelf een moesten kiezen: Owen Storer. We vergeleken elkaars denkbeelden op pro en contra en bouwden blijvende vriendschappen op. Diverse in mij sluimerende principes werden losgewroet en daardoor kon de toen bekende didacticus Turkstra mij in 1953 bij de totstandkoming van onze 'Rekendidactiek' schrijven, dat Debden mij geen windeieren had gelegd, een uitspraak, die in de eerste plaats een compliment voor de conferentie inhoudt en die ik nu gebruik om de waarde van internationaal overleg te onderstrepen.

Om een indruk te geven van de volgende conferenties, waarvan ik er vele helaas niet zelf heb kunnen volgen, combineer ik eigen notities en herinneringen met het bijna 100 bladzijden tellende 'Aperçu historique' van de CIEAEM door collega Lucienne Félix. Er zijn 5 samenkomsten geweest in Frankrijk en evenveel in Italië, 4 in België en in Zwitserland, 3 in Spanje, 2 in Nederland, Luxemburg, Duitsland, Engeland, Polen en 1 in Portugal, Yougoslavië, Oostenrijk, Denemarken, Hongarije, Tunesië, Canada en Mexico. Ik meen, ook in Australië.

De spreiding van de deelnemers is veel groter. Zelfs met mijn beperkte gegevens kan ik deelnemers noemen uit alle werelddelen, de onderdelen van Amerika afzonderlijk te nemen. Ook het aantal per conferentie is fors toegenomen. Begon Debden met ongeveer een dozijn, nu loopt hun aantal in de honderden. De leden betalen geen contributie, wel conferentiekosten, een excursie inbegrepen. Er moeten wel regeringen of andere sponsors zijn, die geldelijk steunen. zo hoor ik Angelo Pescarini nog zeggen: 'Paga lo stato italiano'. Ook loont het de moeite, de Belgische regeringspublikaties op dit gebied eens te bekijken.

De activiteiten van de groeiende en wereldomvattende CIEAEM kunnen aldus omschreven worden: het bestuur kiest een plaats van samenkomst en een thema. Een plaatselijke organisatie voltooit het omvangrijke werk. Het centrale thema wordt plenair ingeleid en over de sub-thema's wordt in kleinere groepen beraadslaagd. Er is een grote vrijheid voor denkbeelden, die los van het thema staan. Vroeger ging dat wat minder gedisciplineerd. Zo kon een Zwitser plotseling de aandacht vestigen op het tegenvoorbeeld en een Fransman onverwacht voorstellen, het deelteken af te schaffen, wat hij keurig argumenteerde. Voor de verhouding zou ik het willen handhaven.

Voorzitter van de CIEAEM is nu de Italiaan M. Pellerey. Ere-voorzitster is de Poolse A. Z. Kry-

gofska. Was verleden jaar het voorzitterschap in Nederlandse handen (Prof. Freudenthal), nu ligt het secretariaat in ons land: J. de Lange, vakgroep O. W. & O. C. (Rijksuniversiteit Utrecht) Na een conferentie verschijnt een uitvoerig verslag. Voor mij ligt dat van nr. 37, begin augustus 1985 Leiden, verzorgd door J. de Lange en zijn staf. Hoewel in andere publikaties ook andere talen gebruikt worden, is dit deel van ruim 400 blz. deels uitgevoerd in Frans, deels in Engels, de voorkeurtalen van de CIEAEM. Het thema luidde: 'Wiskunde voor allen in het computertijdperk'. Op blz. 216-220 draagt Emma Castelnuovo op de haar geheel eigen wijze bij aan een stuk, dat juist complementair is aan het thema, op blz. 375-378 noemt Lucienne Félix in een geschiedkundige beschouwing van de CIEAEM deze een bron van onderzoekingen en op blz. 392-398 is mijn voordracht over Axiomatische Didactiek aan de orde gesteld. Deze is een uitvloeisel van de bij 'Rekendidactie' genoemde principes en eindigt met de zin: dat is een realisatie van 'Wiskunde voor allen'.

Het thema van de 38e conferentie, in Southampton, juli '86, was 'Wiskunde voor 14-17 jarigen' en een van de zes subthema's voerde de gedachten naar verbetering van het onderwijs aan jongere leerlingen, opdat het later gladder zou verlopen. Dit maakte mij mogelijk, ook hier op in te haken met de Axiomatische Didactiek. Conferentie 39 is in Canada, van 27/7 tot 1/8 1987 en heeft een m.i. hoogst belangrijk thema: 'De rol van de fout'. Ook zijn er reeds plannen voor nr. 40 in Budapest, waar de zesde conferentie van J.C.M.I. (eens in de 4 jaar) wordt gehouden.
Wie zich voor 'Canada' interesseert kan schrijvven naar:

Cécile Goupille ou Loic Thérien
Faculté d'Education
Université de Sherbrooke,
Sherbrooke, Quebec, J1K 2R1
Canada

in Frans of Engels.
In het voorgaande is de Axiomatische Didactiek twee keer zonder commentaar aangestipt. Het eerste viertal axioma's slaat, conform de E en de A van CIEAEM in het midden, op studie en verbetering in het algemeen. Ze hebben achtereenvolgens betrekking op:

- het zoeken van vergelijkingsmateriaal, concreet en abstract,
- het beschouwen van specialisaties en generalisaties (structuur),
- de reversibele beschouwing van een studieobject en
- de beste plaats voor het noteren van onze gedachten.

Het vijfde axioma is echt didactisch en zegt, dat toepassing van het eerste viertal op de studie van de didactiek (de E en de A) vruchtdragend kan zijn.
Ik vermeld hier nog de hoofdstelling van mijn Axiomatische Didactiek, die luidt: *De denkwijzen van de wiskunde verdienen prioriteit boven de wiskunde zelf.* Wel te verstaan, wat betreft de aandacht ervoor. In een volgend artikel hoop ik dit te kunnen aantonen met voorbeelden, die weer verschillen van wat ik tot dusverre elders heb genoemd. Laat ik vooral eindigen met het (herhaald) uitspreken van mijn dankbaarheid aan de CIEAEM voor het vele, dat deze organisatie mij heeft gegeven.

Over de auteur

In 'Ik was wiskundeleraar' heeft Fred Goffree gesprekken met vijf bekende collega's gebundeld.
Eén van hen is Jan Karel Timmer.

Vergeten jubilea

Hans Freudenthal

Er was eens een gouden 'Euclides'.
Ik bedoel de vijftigste jaargang van dit tijdschrift. Van zijn lezers mag je verwachten dat ze ook zonder rekendoosje kunnen bepalen in welk schooljaar die verschenen is. Hoe loste men de vraag op of en wanneer het jubileum te vieren?
Een gouden bruiloft vier je als de vijftig jaren huwelijk voltooid zijn.
Een gouden 'Euclides' had je op de laatste bladzijde van het laatste nummer van de vijftigste jaargang kunnen vieren, om zo te zeggen als mosterd na de maaltijd. Je had je natuurlijk ook kunnen redden door de eerste bladzij van het eerste nummer van de vijftigste jaargang te beginnen met 'Vijftig jaar geleden verscheen het eerste nummer van "Euclides"', maar dat zou bezijden de waarheid zijn geweest, want het heette toen nog geen Euclides, maar 'Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde...' en ging pas vanaf de vierde jaargang naar de naam Euclides luisteren. Men heeft het probleem toen anders, eleganter, opgelost: een dubbele aflevering, blz. 128 tot 258 als – bijzonder geslaagd – jubileumnummer.

Tussen twee haakjes: wie voorspelt het aantal ingezonden stukken wanneer de mensheid zich gereed maakt om op 1 januari 2000 (dus een jaar te vroeg) de komst van de 21e eeuw te vieren?
Behalve mijn eigen veelvouden van 10 en 25 heb ik de laatste jaren in woord of geschrift nogal eens die van al dan niet bevriende verenigingen, instellingen, uitgevers moeten helpen herdenken en dat verleidde me steevast tot historische studiën en bracht me onder meer – daarvandaan dit opstel – tot de ontdekking van wat ik elders heb genoemd, de 'annus mirabilis' van het Nederlandse wiskunde-onderwijs: het jaar 1924 met drie heuglijke wapenfeiten (evenveel als De Ruijter ter zee behaalde in 1673).

Wie daarstraks mee heeft gerekend is van het eerste van die feiten al op de hoogte: Om het 'Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, gewijd aan onderwijsbelangen' – toentertijd een steunpilaar van de opleiding tot de akte KV – niet uit zijn voegen te doen barsten, worden vanaf 1924 de didactische en historische bijdragen (om het kort te zeggen) naar een Bijvoegsel verwezen – in zes twee-maandelijkse afleveringen van *f* 3,– per jaargang verkrijgbaar (*f* 2,– voor abonnées van Nieuw Tijdschrift of Chr. Huygens). Zoals eerder opgemerkt werd met de vierde jaargang de navelstreng met het moedertijdschrift doorgesneden en de boreling met de naam Euclides gedoopt – tijdschrift voor de didactiek der exacte vakken, en vanaf de 17e jaargang tevens 'Officieel orgaan van Liwenagel en van Wimecos' (als u nog weet wat die akroniemen betekenen).

Het tweede wapenfeit uit 1924, dat ik nu ga memoreren, is het 'Ontwerp van een Leerplan voor het Onderwijs in Wiskunde, Mechanica en Kosmographie op de H.B. Scholen met Vijfjarigen Cursus', ontworpen door de inspectorale commissie die naar H. J. E. Beth als voorzitter werd genoemd en waar inspecteur J. van Andel en P. Cramer lid en E. J. Dijksterhuis secretaris van waren. Dat ontwerp laat zich het beste karakteriseren door de samenvattende zin: (Euclides 2, 114)

Hoofddoel van het wiskunde-onderwijs is het bijdragen tot geestelijke vorming en ontwikkeling; nevendoel het aanbrengen van nuttige kennis.

Uit de door Thorbecke beoogde hogere burgerschool had de HBS zich in die tijd al lang ontwikkeld tot een instelling die ambieerde met het gymnasium te wedijveren en zijn doelstellingen liefst nog hoger gestemd te formuleren. Als wiskundeleraar juist aan een HBS had speciaal Dijksterhuis iets te verwerken en een van de critici van het ontwerp-leerplan richt dan ook kennelijk zijn scherpe pijl en boog speciaal op hem (Euclides 2, 84) wanneer hij aan zijn kritiek als motto Handelingen 26 : 24, maar dan in het Grieks vooropstelt:

'De grote geleerdheid brengt u tot razernij'

wat Dijksterhuis zich dan ook danig aantrekt

(Euclides 2, 114) door ook weer in het Grieks met Matth. 5:114 te antwoorden:

Wie tot zijnen broeder zegt 'gij dwaas' die zal strafbaar zijn door het helsche vuur.

Maar laten we eerlijk zijn. Ook de critici van het ontwerp-leerplan zijn het met de bovengeciteerde doelomschrijving in principe eens al willen ze dat doel met meer bescheiden middelen bereiken. Een van de zeldzame uitzonderingen hierop is D. van Dantzig, van wie ik alleen de titel van een meer fundamenteel opstel (Euclides 3, 156-196) behoef aan te halen:

'Over de maatschappelijke waarde van onderwijs in de wiskunde'.

Het ontwerp van de Commissie Beth ging de ijskast in om er in 1937 weer uitgehaald en –enigszins gewijzigd– afgekondigd te worden. Er was een openbare discussie aan voorafgegaan –een uniek verschijnsel van democratie voor die tijd– en op gevolgd. Inspecteur Van Andel zou bij die gelegenheid (volgens Wansink, Euclides 14, 72) hebben gezegd:

'Het nieuwe leerplan is historisch gegroeid, niet van boven opgelegd'.

Historisch gegroeid –in de ijskast– en niet van boven opgelegd, maar voorbereid door een groep gezaghebbenden, die men om niet zelf voor schut te staan, niet graag tegensprak. Wel te verstaan, men ging er accoord mee omdat Van Andel verzekerd had dat de oude examenregeling van 1928 alsnog van kracht zou blijven. En aldus geschiedde, met het gevolg dat het leerplan van 1937 een wassen neus zou blijven.

Heel af en toe werd toch eens afgerekend met de hypocrisie van hoog gestemde eisen in een onderwijsrealiteit, waarvoor de eisers hun ogen sloten. Ik citeer B. Coster (Euclides 11, 57-80) uit het verre Bandoeng (maar toch nabij het Nederlandse Onderwijs), die zich richt tegen Dijksterhuis' 'epistemisch Wiskunde-onderwijs".

'Maar naar buiten praten wij daar niet over. Naar buiten doen we net of we buitengewoon nut hebben van de wetenschappelijke voorlichting van enkele knappe koppen uit het korps die het blijkbaar zoveel beter weten dan wijzelf. In het hart nemen we ons voor toch maar verder te gaan op de manier, die we geleerd, dat tenminste nog enig resultaat garandeert. En laten we de mooie wetenschappelijke voorlichting kalm over ons heen gaan'.

Om het verhaal af te ronden, moet ik nog eventjes ingaan op de Wiskunde Werkgroep van de WVO, die zich van 1948 tot 1952 met een nieuw ontwerpleerplan bezig had gehouden, lijnrecht tegengesteld aan dat van de Commissie-Beth: geen hooggestemde doelen, wel begrip voor de dienende functie van de wiskunde, radicaal snoeien van wildgroei terwille van inhoudelijke vernieuwing. Lijnrecht tegengesteld trouwens ook aan wat straks als New Math wereldwijd het wiskunde-onderwijs zou bedreigen. Wimecos heeft er toen snel op ingespeeld en in 1955 werd een nieuw leerplan ingevoerd – nooit eerder is een leerplan zo democratisch tot stand gekomen in de geschiedenis van ons wiskunde-onderwijs. Helaas, er was geen lang leven aan beschoren. New Math was al op komst.

Het is een misvatting, New Math met de spoetnikshock te laten beginnen. Het begon veel vroeger –rond 1950– onder de invloed van Bourbaki's codificatie en systematiek van de wiskunde, door velen als doel in zichzelf geïnterpreteerd, vooral ook door mensen die geen weet hadden van de wiskundige inhouden die door dit werk werden gecodificeerd en gesystematiseerd. Zó logisch, zó systematisch moest wiskunde worden onderwezen –ver van de slordige intuïtie en de ruis van het leven– en het grote probleem van het wiskundig falen zou meteen de wereld uit zijn.

Op een voor de geschiedenis van het wiskunde-onderwijs in de jaren 60 en 70 cruciaal colloquium in Melun (1952) waar Piaget voor het eerst met Bourbaki, door Dieudonné vertegenwoordigd, werd geconfronteerd, overtroefde E. W. Beth zijn vader met een eis die in het historisch gebeuren zijn invloed zou doen gelden (J. Piaget et al., L'enseignement mathématique, Neuchâtel, 1955.)

Le rôle de la formation mathématique dans l'enseignement secondaire consiste presque exclusivement, me paraît-il, à familiariser les élèves avec la méthode déductive.

Wat de wiskundigen te Melun ter tafel brachten, was voor Piaget een gesloten boek. Alleen hoorde hij geregeld het hem sympathieke woord 'structuur' weerklinken. Maar met Piaget, naar het scheen, psychologische rugdekking en dankzij de spoetnik-shock behaalden gezaghebbende wiskundigen in 1959 de Royaumont een glorieuze overwinning op het wiskunde-onderwijs, die tot New Math zou leiden, om jaren later op een smadelijke nederlaag uit te draaien.
Maar nu het derde wapenfeit van 1924: De brochure van Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa '*Wat kan en moet het meetkunde-onderwijs aan een niet wiskundige geven?*', bij Wolters verschenen en door Dijksterhuis beantwoord in '*Moet het meetkunde-onderwijs gewijzigd worden?*' – het opstel waarmee het eerste 'Bijvoegsel' opent. Tatiana Ehrenfest propageerde in haar geschrift een propaedeuse die vooraf zou gaan aan het formele meetkunde-onderwijs. Om deze propaedeuse in te vullen heeft zij later haar 'Übungensammlung' (1931) geschreven – een nog steeds onvolprezen werk.

Waar hebben ze zich toen druk om gemaakt, vraag je je bij de discussies Dijksterhuis-Ehrenfest af? Om een meetkunde-onderwijs, dat nu inmiddels tot een ver verleden behoort? Toch heeft Tatiana Ehrenfest niet voor niets geijverd. Immers meetkunde –en vooral Tatiana Ehrenfests visie erop– heeft later de Van Hieles beslissend beïnvloed en tot Pierre van Hieles niveautheorie geleid.

Ondanks haar 'propaedeuse' stond ook Tatiana Ehrenfest midden in de aloude traditie van het geloof in de formele waarde van het wiskunde-onderwijs, dat ten onzent onder meer door vader en zoon Beth beleden werd en in New Math zijn toppunt bereikte. Ook voor haar was de met het oog en de hand beoefende intuïtieve meetkunde alleen maar propaedeuse, dat wil zeggen voorspel tot wat traditioneel meetkunde heette. De grote waarde van haar 'Übungensammlung' schuilt echter in wat later 'rijke context' zou worden genoemd – geen voorspel maar een voortdurend medespel van de realiteit.
Rijke context – een nieuw hoofdstuk in het wiskunde-onderwijs.

Mededeling

Betaling contributie

In augustus ontvangen alle leden gratis een acceptgiro ter betaling van de contributie (ƒ55,–; ƒ37,50) voor het nieuwe verenigingsjaar.
Ruim 90% van de leden betaalt op korte termijn. De overige leden moeten opnieuw aangeschreven worden. Het opsporen en (herhaald) aanschrijven kost veel geld. Daarom verzoekt het bestuur deze leden *voor 1 november* hun contributie te betalen.
Voor degenen die toch aangeschreven moeten worden zullen de *kosten* per aanschrijving *ƒ2,50* bedragen.
Als op 1 mei de contributie over het lopende verenigingsjaar nog niet voldaan is, zal *ƒ10,–* aan *kosten* in rekening gebracht moeten worden.
Opzeggingen dienen te geschieden *voor 1 juli.*
Tussentijdse opzeggingen zijn niet mogelijk.

De penningmeester.

Congres VVWL

Het tweejaarlijkse congres van de VVWL heeft plaats op 1, 2 en 3 juli in Neerpelt.
Plaats: Dommelhof. Kosten voor maaltijden en logies plus congresverslag Bfr. 1920,–, te storten op giro 000-1116247-68 t.n.v. VVWL te Wilrijk (België). Nadere inlichtingen: Bestuur VVWL, zie Vademecum, blz. 88.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Jaarvergadering/studiedag 1987

Eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 1987 op zaterdag 31 oktober 1987 in het gebouw van
HET NIEUWE LYCEUM
Jan Steenlaan 38
BILTHOVEN
030-88 30 60
Aanvang 10.00 h.

Agenda
9.30 h-10.00 h Aankomst, koffie
10.00 h-10.30 h **Huishoudelijk gedeelte**

a. Opening door de voorzitter, dr. Th. J. Korthagen.
b. Notulen van de jaarvergadering 1986 (zie Euclides).
c. Jaarverslagen (zie Euclides).
d. Decharge van de penningmeester en benoeming van een nieuwe kascommissie. Het bestuur stelt kandidaat: drs. S. Garst, Oude Tonge en Mw. N. B. Sies-Oosterveld, Delft.*)
e. Bestuursverkiezing in verband met het periodiek aftreden van L. Bozuwa, dr. Th. J. Korthagen en drs. J. W. Maassen. De heer L. Bozuwa stelt zich niet herkiesbaar. Het bestuur stelt kandidaat: mw. H. J. Goemans, dr. Th. J. Korthagen en drs. J. W. Maassen.*)
f. Vaststelling van de contributie 1988/1989. Het bestuur stelt voor de contributie vast te stellen op *f* 55,–.

10.30 h-16.30 h **Themagedeelte**
16.30 h-17.00 h **Huishoudelijk gedeelte**

g. Rondvraag.
h. Sluiting

*) Tot achtentwintig dagen na het verschijnen van deze oproep kunnen eveneens personen schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden.

Recreatie

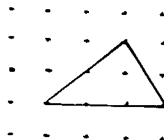
Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Recreatie

569. P. Bronkhorst (88), nestor van de NVvW, is nog steeds enthousiast beoefenaar van de mathematische recreatie. Hij heeft me zelfs toevertrouwd, dat hij al lang bedankt had als Euclides geen rubriek recreatie had. In het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, jaargang 74, afl. 3, januari 1987, vond ik een fraaie bijdrage van zijn hand (sprokkel 291). Met zijn toestemming volgt hier een ietwat vereenvoudigde versie van zijn probleem.
Een cirkelschijf wordt door n stralen in n sectoren verdeeld, op rij cyclisch genummerd 1, 2, ..., n ($n \geq 3$). Van n eveneens 1, 2, ..., n genummerde fiches plaatst men op de sectoren zo, dat elk fiche terechtkomt op de gelijkgenummerde sector of in een van de beide aangrenzende. In elke sector komt een fiche terecht. Gevraagd het aantal manieren waarop dit mogelijk is.
Men mag volstaan met het geven van een recurrente formule.

570 In The Mathematics Teacher van november 1985 stond de volgende opgave. Gegeven is een geobord met 25 pinnen. Met behulp van elastiekjes kan men driehoeken maken waarvan drie pinnen de hoekpunten zijn. Hoeveel verschillende, d.w.z. onderling niet congruente, driehoeken kan men maken?

De auteur geeft verschillende strategieën om het vraagstuk aan te pakken. Wie zich daarvoor interesseert, kan het artikel zelf nalezen. Ik zal in het antwoord proberen een strategie te geven die door de auteur niet genoemd is.



Oplossingen

566 Op de met een ster aangegeven plaatsen staan een koning K, een koningin D, een toren T, een loper L en een paard P. De velden met het cijfer 2 worden door precies twee van deze vijf stukken aangevallen. Waar staan de vijf stukken?
Zie figuur a.
d1 kan slechts door twee stukken aangevallen worden, nl. door het stuk op d8 en dat op c3 of e3. Op c3 of e3 staat dus het paard, op d8 D of T.
Dd8 geeft Tg7, Le3. Dan wordt g5 driemaal aangevallen.
Td8 geeft Dg7, Le3 en dus Pc3 en Kb5.

567 Op het bord staan weer de vijf stukken K, D, T, L en P. Van enige velden is aangegeven door precies hoeveel van deze stukken ze aangevallen worden. Waar staan de vijf stukken?
Zie figuur b.

Notatie. Met D5 bedoel ik: de dame valt vijf van de velden aan waarin een cijfer staat.
Ik geef de oplossing in grote trekken.
Maximaal kan zich voordoen: D7, L5, T5, P4, K6. In totaal worden dan maximaal 27 velden aangevallen. Het aantal aangevallen velden bedraagt 21.
L5 impliceert Lc6. Doordat geen ander stuk b5, d7 en e4 meer mag aanvallen, vinden we dan geen oplossing. Dus is maximaal L3. D7 geeft Dc6, hetgeen eveneens niet kan, of Df3. Df3 heeft als gevolg P2 en K3, waardoor we het totaal 21 niet meer bereiken.
D6 geeft Db7 en dat lukt om dezelfde reden niet.
Dus D5. Nu is het maximaal aangevallen velden al tot 23 gereduceerd. D5 geeft Db2, b3 of b4. Db3 of b4 loopt spaak. Dus Db2. Verder Tg7. Nu lukt Pd5, Kf3 en La8. Andere mogelijkheden zijn er niet.

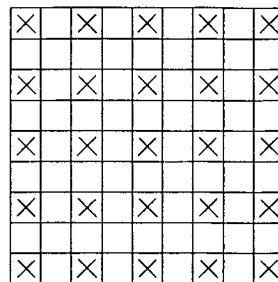
	a	b	c	d	e	f	g	h
8				•				
7	2						•	
6								
5		•					2	
4								
3			•		•			
2								
1				2				

figuur a

	a	b	c	d	e	f	g	h
8								0
7		3	2	1				
6		2						
5		1						
4					1	2		
3					2		2	
2						2	3	
1								

figuur b

568 Een dambord heeft 81 velden. Zet hierop natuurlijke getallen groter dan 1, zo dat op elk paar samenhangende velden (d.z. velden die minstens één punt gemeen hebben) onderling ondeelbare getallen komen. Het grootste getal moet minimaal zijn. Voldoe daarna aan de nevenvoorwaarde dat de som van de getallen minimaal is.
Twee even getallen komen op twee niet-samenhangende velden. Er kunnen dus maximaal 25 even getallen voorkomen, namelijk op de 25 aangekruiste velden.



Er komen dus minimaal 56 oneven getallen voor. Wil het grootste getal minimaal zijn, dan zijn dit alle getallen 3, 5, 7, ..., 113. Een oplossing vinden waarbij alle getallen 3, 5, 7, ..., 113 en bovendien 25 even getallen kleiner dan 113 voorkomen, is niet moeilijk. Er moet echter nog voldaan zijn aan de nevenvoorwaarde dat de som minimaal is.
We kijken naar de 3-vouden. Onder de getallen 3, 5, 7, ..., 113 zijn er 19 die deelbaar door 3 zijn. Deze komen op niet-aangekruiste velden. Dan kan er nog op slechts één aangekruist veld een 3-voud komen. Dit 3-voud kiezen we zo klein mogelijk, dus 3. De even 3-vouden 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48 kunnen dus niet voorkomen. In plaats daarvan nemen we even getallen boven 50 die geen 3-voud zijn, nl. 52, 56, 58, 62, 64, 68, 70.
Met enige voorzichtigheid is het nu niet moeilijk hiermee het dambord te vullen. Een mogelijkheid volgt hier:

10	21	20	63	40	33	50	7	6
13	17	19	11	23	29	31	37	41
70	99	14	15	28	45	56	75	22
43	47	53	59	61	67	71	73	49
44	105	26	3	52	9	2	39	4
79	83	89	5	77	25	97	35	101
8	27	16	51	32	57	34	69	38
85	103	95	91	55	107	65	109	113
46	81	62	87	64	93	58	111	68

Kalender

11 sept. 1987: Eindhoven, Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
31 okt. 1987: Bilthoven, Jaarvergadering/Studiedag NVvW
23 juli-3 aug. 1988: Budapest, ICME-Congres

Inhoud

Peter van 't Riet, Jan Kroon, Annette van der Wal: Wiskunde op materieel kennisniveau 257

Willem van Gaans, Dolly van Drooge: Leermiddelen Ontwikkeling Wiskunde 269

H. Boertien: Doelen en toetsing bij toegepaste wiskunde: Een verkenning II 271

L. Bozuwa: Van de bestuurstafel 278

P. G. J. Vredenduin: De Wageningse Methode derde en vierde leerjaar 279

Jan Karel Timmer: De C.I.E.A.E.M 282

Hans Freudenthal: Vergeten jubilea 284

Mededelingen 286, 287

Boekbesprekingen 270, 281

Recreatie 287

Kalender 288

Adressen van auteurs

H. Boertien, Cornelis Dopperlaan 6, 6952 CB Dieren

Dolly van Drooge, Kroosmeent 17, 1218 BA Hilversum, 02159-3 15 76

Prof. dr. H. Freudenthal, p.a. OW&OC, Tiberdreef 4, Utrecht

Willem van Gaans, Basaltdijk 8, 4706 DL Roosendaal, 01650-4 31 65

J. Kroon, Havikstraat 32, 3414 TR Utrecht

S. P. van 't Riet, Vordensebeek 88, 8033 DG Zwolle

J. K. Timmer, Karel Gerardstraat 7, 7552 GT Hengelo (O.)

Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth

A. van der Wal, Ordermolenweg 23, 8312 SC Apeldoorn